

CAPÍTULO 5

Geometría de transformación

Matemáticas en la vida diaria

Una historia de simetría La simetría es el equilibrio que se obtiene al repetir una misma figura o forma básica de algún diseño, en un patrón regular. A través de la historia, muchas culturas han usado diseños simétricos para adornar sus vestidos, su cerámica o sus artesanías. Es probable que uno de los ejemplos más sobresalientes del uso de la simetría en el arte, sea el trabajo realizado por el artista holandés M.C. Escher.

Piensa al respecto ¿Qué diseño básico repetitivo puedes observar en la obra artística de Escher, cuyo trabajo se muestra en la parte superior derecha de esta página?



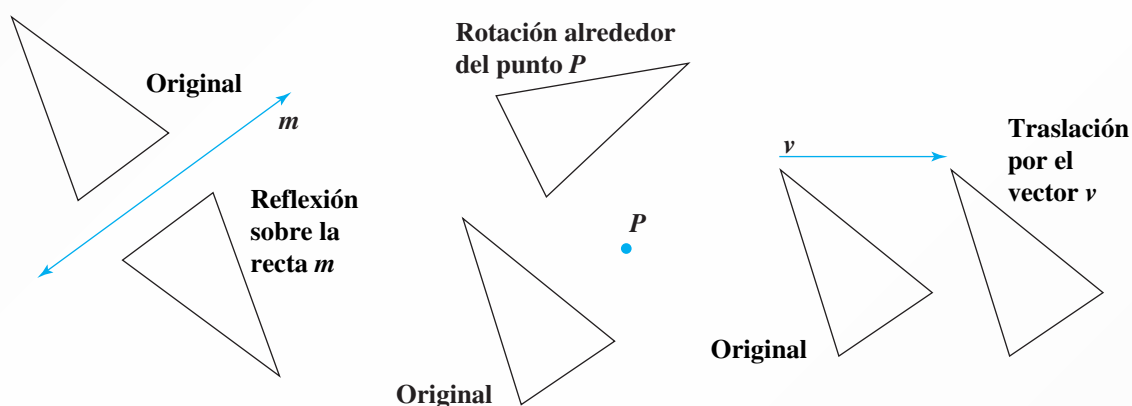
M.C. Escher's "Lizard" (© 2003)
Condon Art B.V. - Baarn - Holland.
Todos los derechos están reservados.



Carta a la familia

Estimados alumno(a) y familiares:

En el siguiente capítulo de matemáticas, estudiaremos la *geometría de transformaciones*. Veremos las cuatro transformaciones básicas que se pueden aplicar a objetos bidimensionales: reflexión (voltear), rotación, traslación (deslizar hacia otra posición) y dilatación (ampliar o reducir de tamaño). Estas transformaciones nos permitirán mover un objeto, cambiarlo de posición o ponerlo sobre otro objeto que tenga la misma forma. Aprenderemos a identificar estas transformaciones, a describirlas y a aplicarlas en la creación de diseños geométricos.



Algunos de los más interesantes patrones de bordes, diseños de papel tapiz y patrones de colchas se crean combinando transformaciones.

Vocabulario Aprenderemos los siguientes términos nuevos en este capítulo:

dilatación

imagen

eje de reflexión

eje de simetría

mediatriz

reflexión sobre una recta

simetría de reflexión

rotación

simetría de rotación

dibujo a escala

factor de escala

transformación

traslación

vector

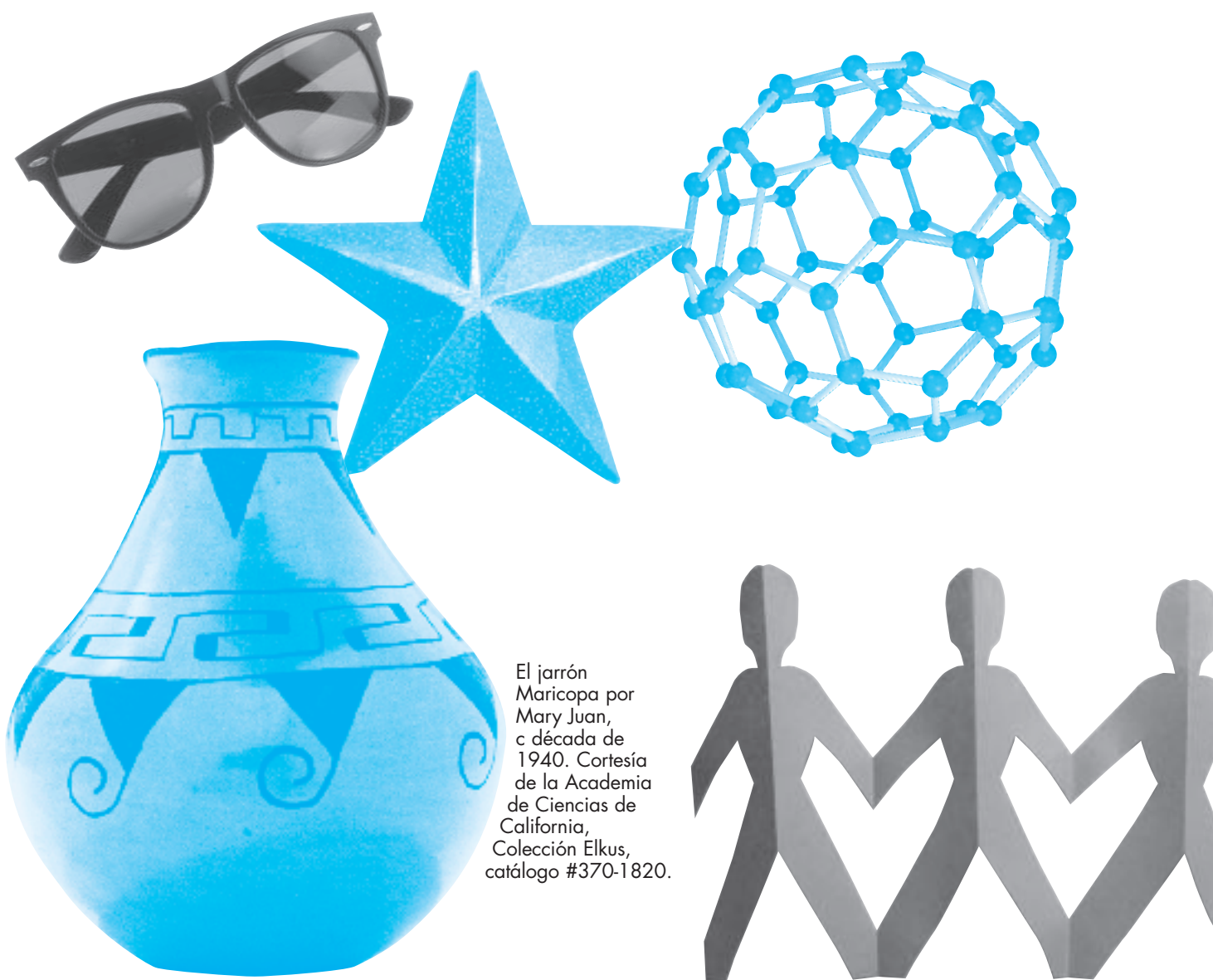
¿Qué pueden hacer en el hogar?

Durante la clase, su hijo(a) usará transformaciones para crear diseños. Pueden pedirle a su hijo(a) que les muestre algunos de sus diseños. Igualmente, presten atención a los patrones o figuras simétricas así como a los patrones de figuras dilatadas que encuentren en edificios, papel tapiz, textiles y otros sitios en el hogar y sus alrededores. ¡Es sorprendente el número de ejemplos que existen!

VOCABULARIO
transformación

En este capítulo, aprenderás sobre cuatro tipos de transformaciones. *Transformar* significa cambiar. Una **transformación** es una manera de tomar una figura y crear una figura nueva que sea semejante o congruente a la original.

Una manera útil de comenzar a pensar sobre las transformaciones es a través de la simetría. La *simetría* es una forma de equilibrio de las figuras y objetos. Cuando los arqueólogos y los antropólogos estudian diferentes culturas, a menudo, observan la simetría de los diseños de la alfarería y otras artesanías. Los químicos y físicos estudian cómo se relaciona la simetría en los arreglos de átomos y moléculas con sus funciones. Los artistas con frecuencia usan simetría en sus creaciones.



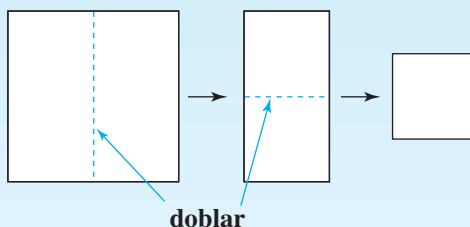
El jarrón
Maricopa por
Mary Juan,
c década de
1940. Cortesía
de la Academia
de Ciencias de
California,
Colección Elkus,
catálogo #370-1820.



Explora

Sigue estas instrucciones para crear un diseño simétrico de un “copo de nieve”.

- Comienza con una hoja de papel cuadrada. Dóblala por la mitad en una dirección y, de nuevo, por la mitad en la otra dirección. Esto formará un cuadrado más pequeño.



- A lo largo de cada orilla del cuadrado doblado, dibuja una figura simple: algo como lo que se muestra.



- Corta las figuras que dibujaste y desdobra el cuadrado.

Describe las maneras en que tu diseño de copo de nieve se ve “equilibrado” o simétrico.

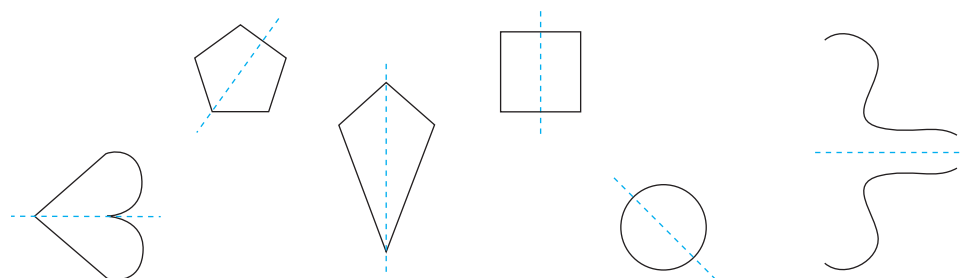
Investigación 1 Ejes de simetría

VOCABULARIO

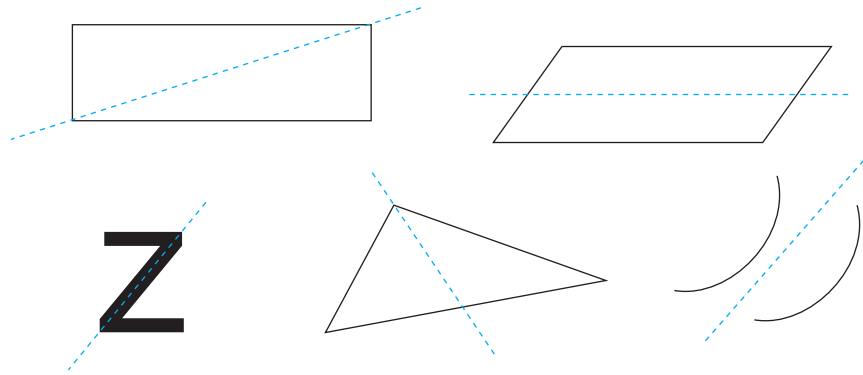
simetría lineal
eje de simetría
simetría de reflexión

Hay diferentes tipos de simetría. Un tipo es la **simetría de reflexión**, también llamada **simetría lineal**. Con este tipo de simetría, se puede dibujar una recta entre las dos mitades de una figura o entre dos copias de una figura. La recta es como un espejo entre ellas, con la mitad de una imagen idéntica a la otra mitad, pero volteada. La recta se llama **eje de simetría**.

Las líneas punteadas a continuación son ejes de simetría.



Las líneas punteadas a continuación *no* son ejes de simetría. Aunque éstas cortan las figuras por la mitad, no crean mitades “especulares”.



Héctor y Dante conversan sobre cómo determinar ejes de simetría.



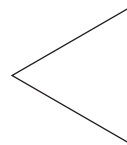
MATERIALES

geoespejo

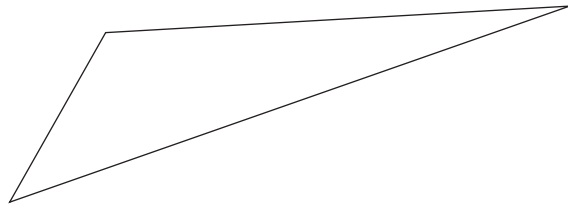
Serie de problemas **A**

Para cada figura, determina todos los ejes de simetría que puedas y registra cuántos ejes de simetría tiene la figura. Después bosqueja la figura y muestra los ejes de simetría.

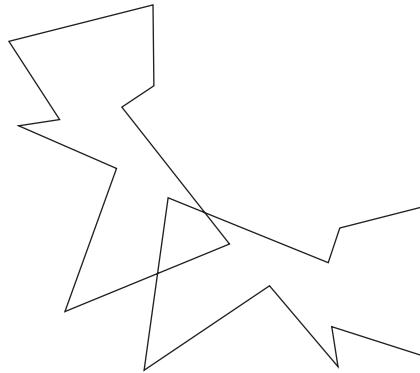
1. Éste es un triángulo equilátero. (Los tres lados son de la misma longitud.)



2. Éste es un triángulo escaleno. (Los tres lados tienen diferentes longitudes.)



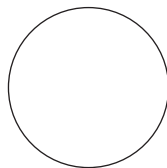
3. Estos son dos polígonos traslapados.



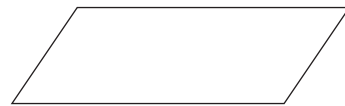
4. Éste es un rectángulo.



5. Éste es un círculo.



6. Éste es un paralelogramo.



Comparte & resume

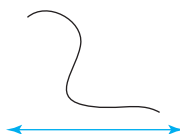
Encuentra los ejes de simetría en este cuadrado. Después bosqueja el cuadrado y usa líneas punteadas para mostrar los ejes de simetría. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado?



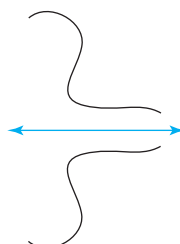
Investigación 2 Reflexión

VOCABULARIO reflexión sobre una recta

Puedes crear figuras con simetría de reflexión mediante una transformación: una **reflexión sobre una recta**. Supón que tienes una figura y una recta.



Imagina que la recta es el eje de simetría y que la curva es solamente la mitad de la figura. La otra mitad es la *reflexión* de la curva.



VOCABULARIO eje de reflexión imagen

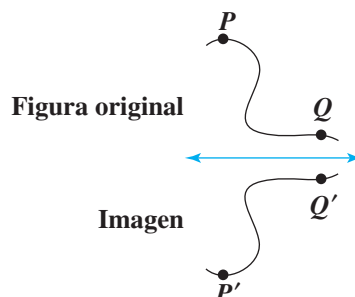
La reflexión de una figura es su imagen especular. La recta actúa como un espejo y se llama **eje de reflexión**. El resultado de una reflexión, o de una transformación, se llama una **imagen**.

Cada punto en la figura original tiene una imagen. En una reflexión, la imagen de un punto P es el punto que coincide con el punto P , visto a través de un geoespejo o cuando doblas a lo largo de un eje de reflexión.

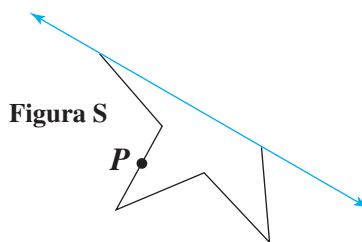
La imagen del punto P se llama punto P' , se dice “ P prima”. En el siguiente dibujo, los puntos P' y Q' son imágenes de los puntos P y Q .



Como en las caras verdaderas, esta máscara no es exactamente simétrica.



Tamika usa su geoespejo para reflejar la Figura S sobre la recta.



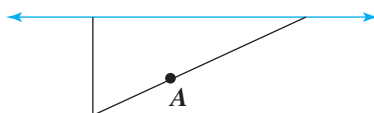
MATERIALES

- geoespejo
- transportador
- regla métrica

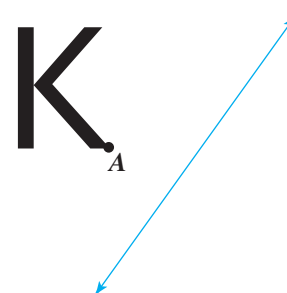
Serie de problemas B

Los Problemas 1 al 3 muestran una figura y un eje de reflexión. Copia cuidadosamente cada figura. Después, usa un geoespejo para reflejar la figura sobre la recta para crear la imagen. Marca la imagen del punto A y nómbrala A' . Haz tus dibujos tan exactos como puedas.

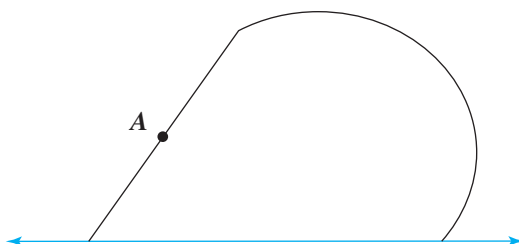
1.



2.



3.



4. Cuando reflejas una figura sobre una recta, ¿es la imagen que creas *congruente* a la original (del mismo tamaño y forma), *semejante* a la original (de la misma forma, pero posiblemente de diferente tamaño), o *ninguna de las dos*? Explica cómo lo sabes.
5. Para cada dibujo que hiciste en los Problemas 1 al 3, conecta los puntos A y A' con una recta. Mide el ángulo entre cada eje de reflexión y el Segmento AA' ($\overline{AA'}$). ¿Cuáles son las medidas?
6. Para cada dibujo que hiciste en los Problemas 1 al 3, mide:
 - a. la longitud del segmento entre el punto A y el eje de reflexión
 - b. la longitud del segmento entre el punto A' y el eje de reflexión
7. Haz una conjetura acerca de las relaciones entre el eje de reflexión y el segmento que conecta un punto con su imagen.

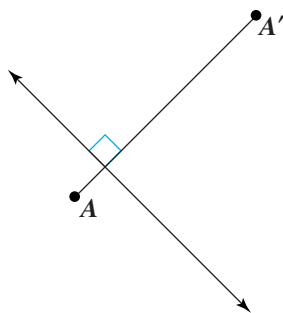
VOCABULARIO

mediatriz

Las rectas llamadas *mediatrices* son particularmente útiles al trabajar con reflexiones. La **mediatriz** de un segmento tiene dos características importantes.

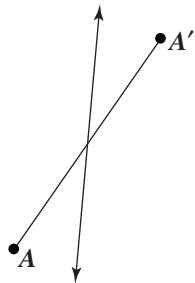
- Se encuentra con el segmento en su punto medio (ésta *biseca* el segmento).
- Es perpendicular al segmento.

Esta recta es perpendicular a $\overline{AA'}$ pero no es una bisectriz de éste.



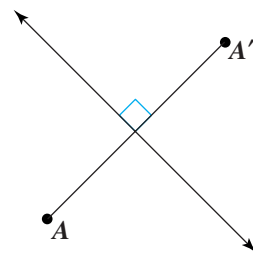
no es una mediatriz

Esta recta biseca $\overline{AA'}$ pero no es perpendicular a éste.



no es una mediatriz

Esta recta es una mediatriz de $\overline{AA'}$.



mediatriz

MATERIALES

- papel de calcar
- regla
- transportador
- geoespejo

Serie de problemas C

1. Copia cada segmento y dibuja una mediatriz de éste.

a.



b.



2. Explica cómo encontraste la mediatriz en el Problema 1.

3. ¿Cuántas mediatrices tiene un segmento?

Comparte & resume

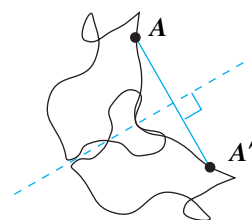
Describe una relación entre un eje de reflexión y el segmento que une un punto a su imagen reflejada. Usa la idea de la mediatriz en tu descripción.

Investigación

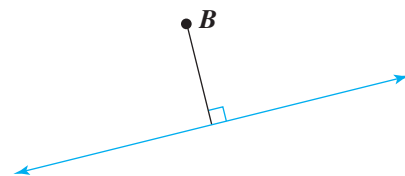
3

El método de la mediatriz

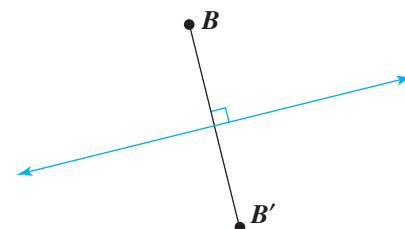
Aún si no tienes un geoespejo a mano, puedes reflejar un punto sobre una recta, con el *método de la mediatriz*. Si el punto A' es la imagen de un punto A en la figura con un eje de simetría, el eje de simetría es la mediatriz del segmento que conecta los puntos.



Para reflejar un punto B sobre una recta con el método de la mediatriz, dibuja un segmento desde el punto B , perpendicular a la recta.



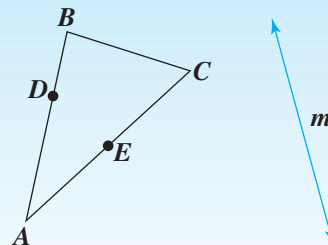
Continúa el segmento más allá de la recta, hasta que dupliques su longitud. Al otro extremo del segmento, marca la imagen del punto, punto B' .



Piensa & comenta

Supón que quieres reflejar $\triangle ABC$ sobre la recta m .

¿Cuáles puntos reflejarías? ¿Por qué?



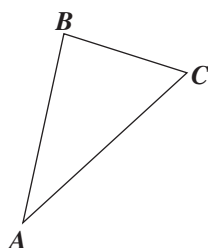
MATERIALES

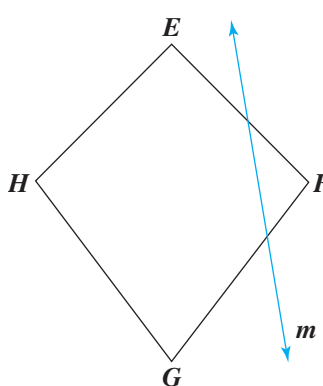
- papel de calcar
- regla
- transportador
- geoespejo (opcional)

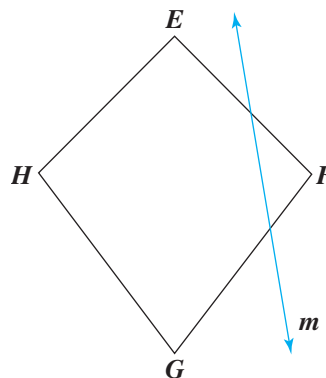
Serie de problemas D

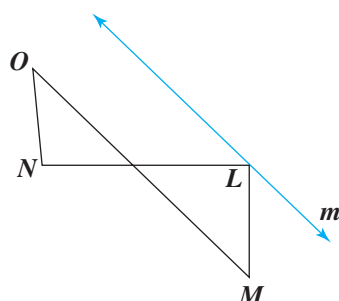
Para cada problema, copia la figura y la recta. Usa el método de la mediatriz para reflejar la figura sobre la recta. Usa un geoespejo o pliega la figura para verificar tu trabajo.

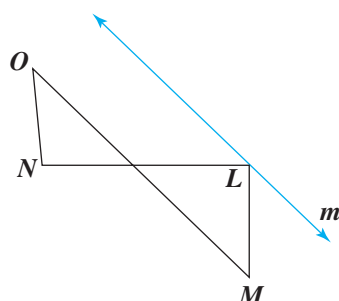
1. 



2. 

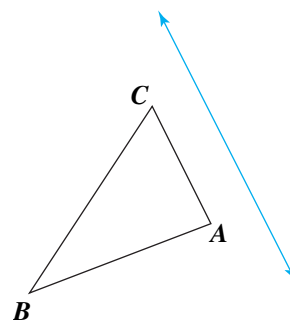


3. 



Comparte & resume

Aquí hay un triángulo y una recta. Explica cómo usarías el método de la mediatriz para reflejar el triángulo sobre la recta.



Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

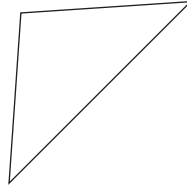


Recuerda

Un *trapezio isósceles* es un trapezio con dos lados opuestos no paralelos que tienen la misma longitud.

En los Ejercicios 1 al 4, copia la figura y dibuja todos los ejes de simetría que puedas. Verifica los ejes que dibujaste doblando el papel.

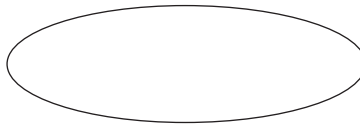
1. Éste es un triángulo isósceles.



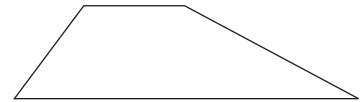
2. Éste es un trapezio isósceles.



3. Ésta es una elipse.



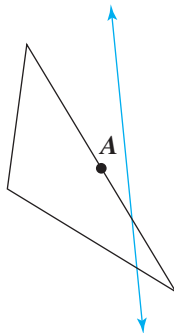
4. Éste es un trapezio.



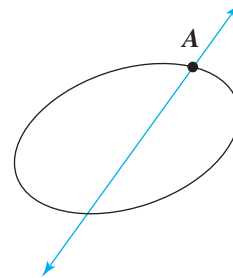
Los Ejercicios 5 y 6 muestran la figura original y un eje de reflexión.

- Copia la figura.
- Refleja la figura sobre el eje y dibuja la imagen.
- Marca la imagen del punto A y nómbrala punto A'.

5.

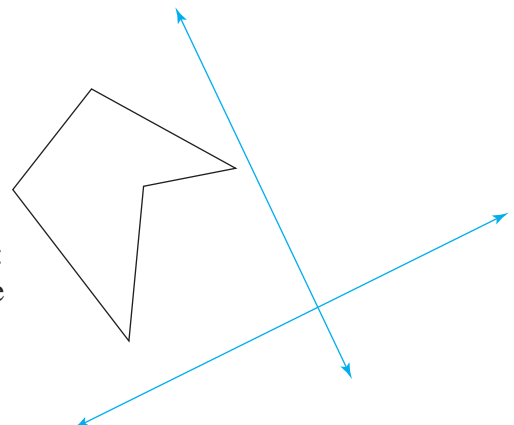


6.



7. Esta figura muestra dos ejes de reflexión.

- Copia la figura.
- Refleja la figura sobre una línea para crear una imagen.
- Ahora refleja ambas figuras: la original y la imagen sobre el otro eje.

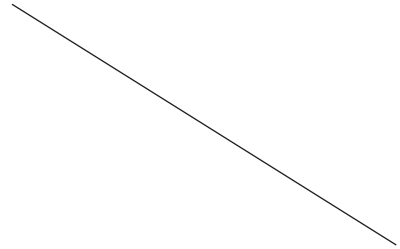


Copia cada segmento y dibuja su mediatriz.

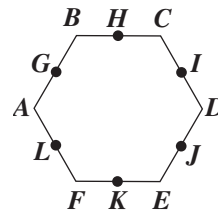
8.



9.

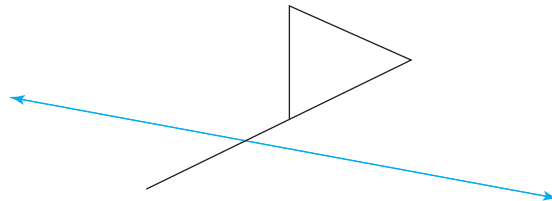


10. Copia esta figura.



- a. Refleja la figura sobre la recta usando el método de la mediatriz.
- b. ¿Cuál es el número mínimo de puntos que tienes que reflejar por este método para ser capaz de dibujar la imagen completa? Explica.

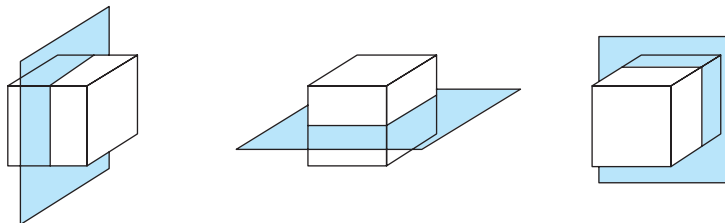
11. Copia esta figura.



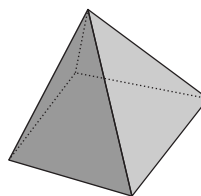
- a. Refleja la figura sobre la recta usando el método de la mediatriz.
- b. ¿Cuál es el número mínimo de puntos que tienes que reflejar por este método para ser capaz de dibujar la imagen completa? Explica.

12. Crea un copo de nieve de papel con cuatro ejes de simetría. Verifica los ejes de simetría doblando el papel.

13. De manera parecida a los ejes de simetría para figuras bidimensionales, los objetos tridimensionales pueden tener *planos* de simetría. Por ejemplo, un cubo tiene nueve planos de simetría, incluyendo estos tres:



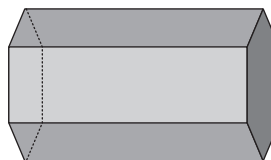
a. ¿Cuántos planos de simetría tiene una pirámide cuadrada regular? Descríbelos o dibújalos.



b. ¿Cuántos planos de simetría tiene una esfera? Descríbelos o dibújalos.



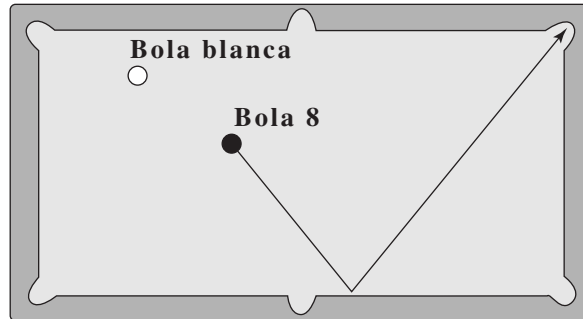
c. ¿Cuántos planos de simetría tiene un prisma hexagonal? Descríbelos o dibújalos.



¿Cuántos planos de simetría tiene este cofre del tesoro?

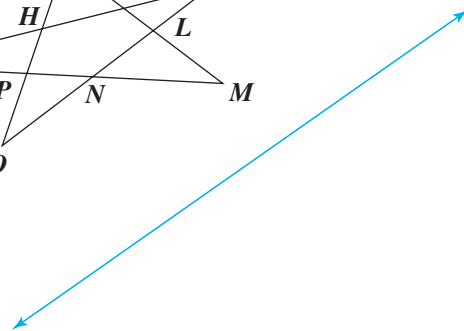
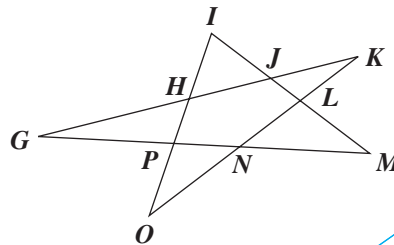
- 14. Deportes** Bianca disfruta jugando billar. Al final de un juego apretado que ella jugó, las únicas bolas en la mesa eran la bola 8 y la bola blanca. Era el turno de Bianca. Para ganar, todo lo que tenía que hacer era mandar la bola ocho dentro de un bolsillo de su elección.

Bianca golpeó la bola blanca, la cual chocó con la bola 8, la impulsó en la dirección que se muestra, cayó en el bolsillo correcto y Bianca ganó el juego.



- ¿Era de alguna manera simétrico el camino recorrido por la bola? De ser así, determina el eje de simetría.
- Bianca dijo que los ángulos formados por el lado de la mesa y la trayectoria de la bola 8, de ida y vuelta son siempre iguales unos a los otros. ¿Es esto cierto en este caso? ¿Cómo lo sabes?

- 15.** Kai dijo que para reflejar esta estrella sobre la recta, sólo necesita reflejar cinco puntos.



¿Tiene razón Kai? De ser así, explica cómo puede dibujar la imagen. Si no, explica por qué no lo podría hacer.

- 16.** Enumera tres cosas naturales o artificiales que tengan ejes de simetría.

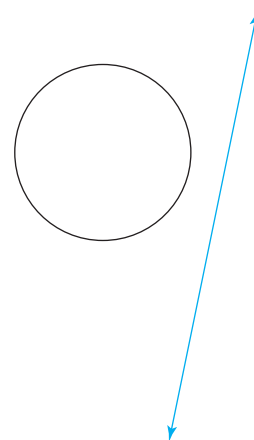
En tus propias palabras

Encuentra un dibujo, diseño u objeto en tu casa que tenga por los menos un eje de simetría. Descríbelo o dibújalo, e indica cada eje de simetría.

Repaso mixto

17. Copia esta figura.

- Usa el método de la mediatriz para reflejar el círculo sobre la recta. ¿Cuántos puntos reflejaste?
- Dobla para verificar tu trabajo. ¿Coinciden exactamente las figuras?
- ¿Cuál es el número mínimo de puntos que debes reflejar con este método para reflejar la figura completa? Explica.



Evalúa cada expresión si $a = 2$ y $b = 3$.

18. 4^a

19. $\left(\frac{1}{9}\right)^a$

20. $\left(9 \cdot \frac{1}{b}\right)^b$

21. $\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}\right)^a$

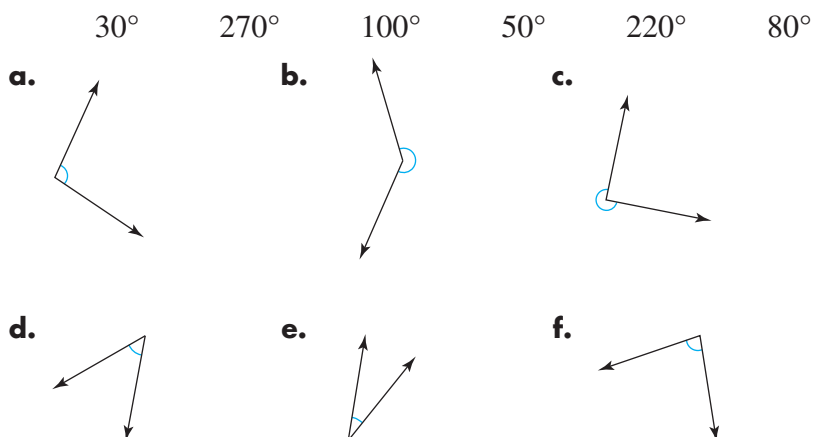
Escribe una ecuación para una recta que sea paralela a la recta dada.

22. $y = 7x - 6$

23. $2x = 4y$

24. $x = -2$

25. **Geometría** Hay 360° en un círculo completo. Sin usar un transportador, haz coincidir cada ángulo con una de las siguientes medidas de ángulos.



26. La tabla muestra la manera en que se diseminaría cierto parche de hongos. Inicialmente, el hongo cubría un área de 12 mm^2 .

- Escribe una ecuación para el área A cubierta por el hongo, después de w semanas.
- ¿Durante qué semana se habrá diseminado el hongo para cubrir un área de por lo menos $3,000 \text{ mm}^2$?

Semana	Área (mm^2)
0	12
1	24
2	48
3	96
4	192

En la Lección 5.1, observaste de cerca la simetría de reflexión o simetría lineal. Estos diseños muestran otro tipo de simetría.



Piensa & comenta

Examina las figuras anteriores. ¿De qué manera parece razonable decir que estas figuras tienen simetría?

Investigación 1 Simetría de rotación

Al principio de la Lección 5.1, examinaste la simetría de un copo de nieve de papel. Probablemente te diste cuenta que tenía simetría de reflexión, pero quizás no te hayas percatado que tu creación también tenía otro tipo de simetría.

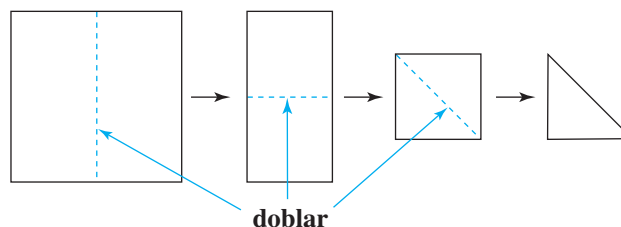
Serie de problemas A

MATERIALES

- tijeras
- papel de calcar
- alfiler

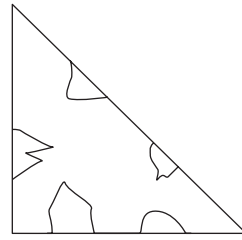
Sigue estas instrucciones para crear otro copo de nieve de papel.

1. Comienza con una hoja cuadrada de papel.
 - a. Dóblala por la mitad tres veces como se muestra.

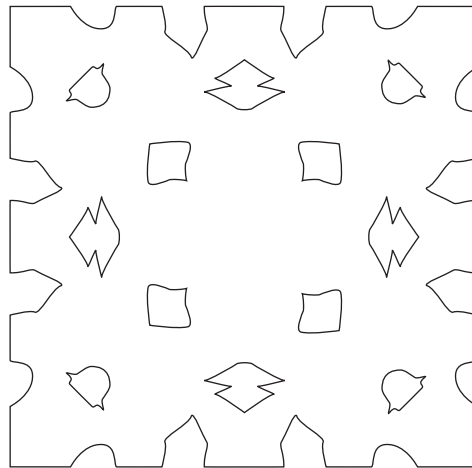




- b. En cada lado del triángulo doblado, dibuja algunas figuras. Por ejemplo, podrías dibujar figuras como éstas:



- c. Corta a lo largo de las rectas que dibujaste y después desdobra el papel. El siguiente copo de nieve se hizo con el diseño anterior:



Ahora, coloca tu copo de nieve de papel sobre una hoja de papel de calcar. Copia el diseño, trazando a lo largo de las aristas, incluyendo los agujeros.

- Asegura con el alfiler los centros de tu copo de nieve y tu trazo. *Rota* (gira) el copo de nieve sobre su centro hasta que el diseño en el papel de calcar coincida con el diseño del copo de nieve. ¿Tuviste que darle una vuelta completa al copo de nieve?
- Rota de nuevo el copo de nieve, hasta que el diseño coincida una vez más. ¿Has regresado el papel a la posición que tenía antes del Problema 2? De no ser así, róvalo de nuevo, hasta que coincidan los diseños. ¿Cuántas veces tienes que girar el copo de nieve antes de darles toda la vuelta?
- ¿Cuántos *grados* debiste rotar el copo de nieve cada vez para lograr que coincidieran los diseños?



Recuerda

Una vuelta completa tiene 360° .

VOCABULARIO

simetría de rotación

Una figura tiene **simetría de rotación** si puedes copiar la figura, rotar la copia sobre un punto central *sin darle toda la vuelta* y encontrar un lugar donde la copia coincide exactamente con el original. El *ángulo de rotación*, el ángulo más pequeño que necesitas girar la copia para que coincida con el original, debe ser menor que 360° .

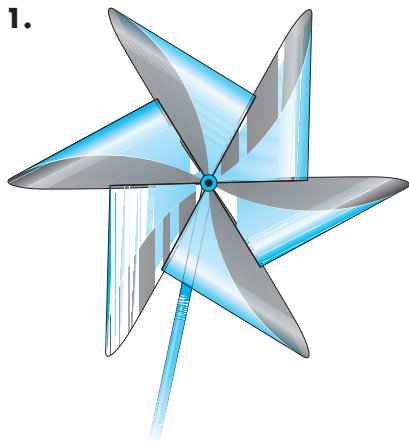
MATERIALES

- regla
- transportador

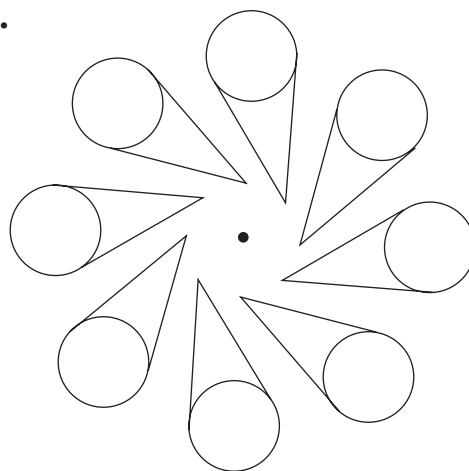
Serie de problemas B

Cada una de estas figuras tiene simetría de rotación. Determina el ángulo de rotación de cada figura.

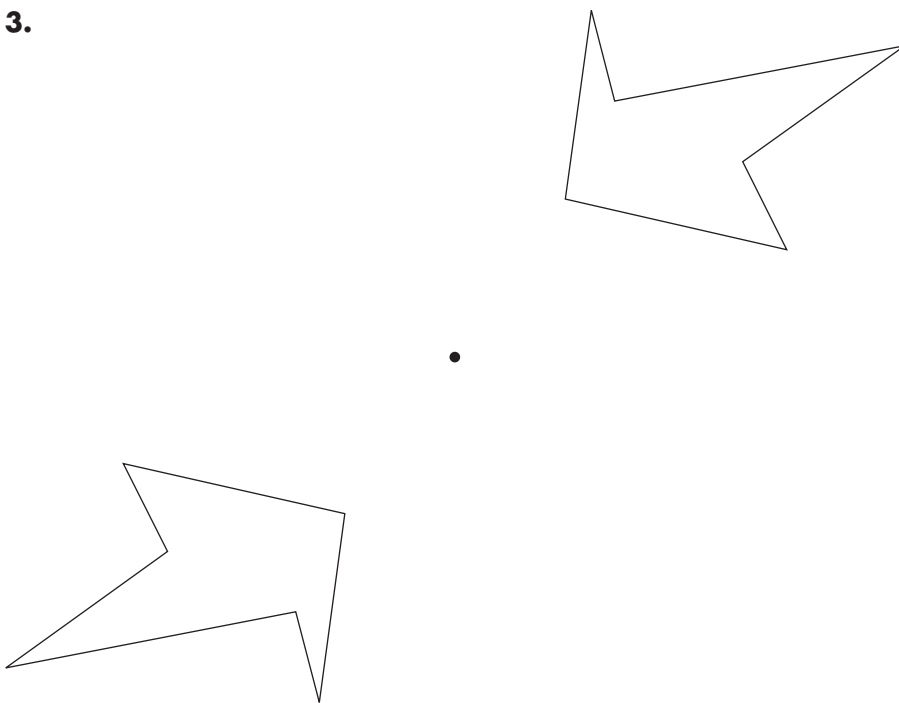
1.



2.



3.

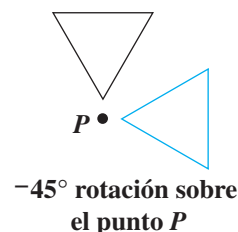
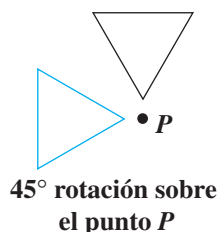


Comparte & resume

Observa de nuevo las figuras en la Serie de problemas B. Haz una conjetura sobre la relación entre el ángulo de rotación y el número de elementos idénticos en la figura.

Para crear tus propios diseños usando la simetría de rotación, necesitas tres cosas: (1) una figura, llamada el *elemento de diseño básico*; (2) un centro de rotación; (3) un ángulo de rotación.

Por convención, los ángulos de rotación suponen que una figura se rota en *sentido contrario* al de las manecillas del reloj. Para indicar rotación en sentido de las manecillas del reloj, usa un signo negativo.



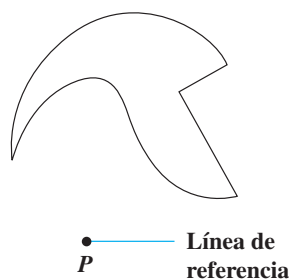
MATERIALES

- papel de calcar
- transportador
- alfiler

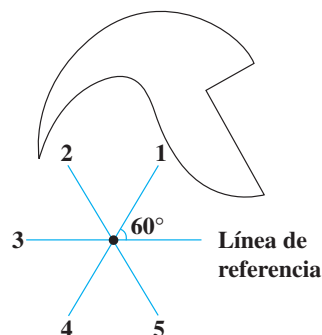
Serie de problemas C

Crearás un diseño al girar la siguiente figura. La figura es tu elemento de diseño y el punto es el centro de rotación. Para este diseño, usarás un ángulo de rotación de 60° .

1. Comienza copiando esta figura, incluyendo el punto P y la línea de referencia.

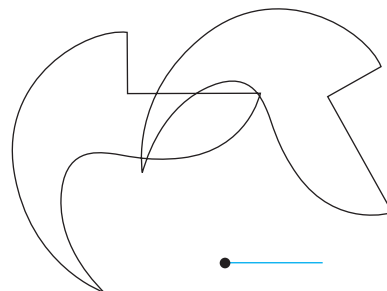


2. Dibuja un nuevo segmento con el punto P como un extremo y forma un ángulo de 60° con la línea de referencia. Rotúlalo como Segmento 1. Después dibuja y rotula cuatro segmentos más a partir del punto P , cada uno forma un ángulo de 60° con el segmento previo, como se muestra aquí.



3. Pon una hoja de papel de calcar sobre tu figura. Junta con el alfiler los papeles a través del centro de rotación. Traza la figura, incluye la línea de referencia, pero *no* traces los Segmentos 1 al 5.

- Ahora, rota tu trazo hasta que la línea de referencia de tu trazo esté directamente sobre el Segmento 1. Traza de nuevo la figura original. Tu trazo ahora debe verse como se muestra a la derecha.



- Rota tu trazo hasta que la línea de referencia del trazo esté directamente sobre el Segmento 2. Traza de nuevo la figura original.
- Repite el proceso. Rota para localizar la línea de referencia sobre el siguiente segmento y traza la figura. Haz esto hasta que la línea de referencia en el trazo esté sobre la línea de referencia original.

VOCABULARIO

rotación

MATERIALES

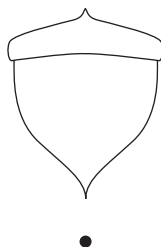
- papel de calcar
- transportador

En la Lección 5.1, aprendiste acerca de la transformación mediante reflexión. Ahora has usado la segunda transformación, la **rotación**. Cada vez que giraste el elemento de diseño básico y lo trazaste, hiciste una rotación.

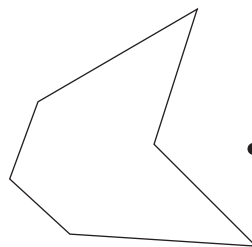
Serie de problemas D

Usa el elemento de diseño dado, el centro de rotación y el ángulo de rotación para crear un diseño con simetría de rotación.

- ángulo de rotación: 120°



- ángulo de rotación: 90°



- ¿Tienen ejes de simetría tus diseños completos? De ser así, ¿dónde?

Comparte & resume

- Cuando reflejas una figura sobre una recta una vez, creas un diseño con simetría de reflexión. Si rotas una figura alrededor de un punto una vez, ¿crea siempre esto un diseño con simetría de rotación?
- Observa los diseños que creaste en la Serie de problema D. ¿Existe un patrón entre el número de elementos idénticos en los diseños terminados y el ángulo de rotación? De ser así, ¿cuál es?

Investigación 3 El ángulo de rotación

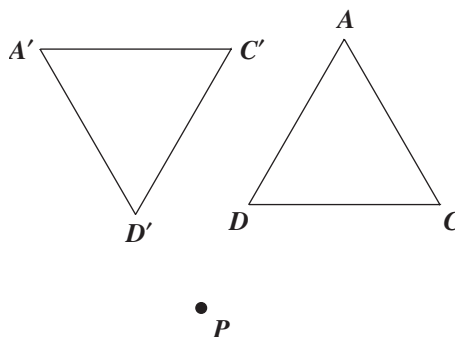
En la Investigación 2, usaste la transformación de *rotación* para crear figuras con simetría de rotación. Ahora, observarás detenidamente una parte importante de estas transformaciones: el *ángulo de rotación*.

MATERIALES

- papel de calcar
- regla
- transportador
- lápices de colores (opcional)

Serie de problemas E

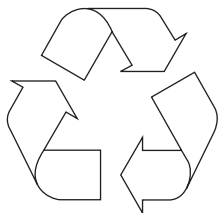
El $\triangle A'C'D'$ es la imagen del $\triangle ACD$ cuando se rota cierto ángulo sobre el punto P . Haz cuidadosamente una copia de la figura completa.



1. Considera el punto A y su imagen, el punto A' .
 - a. Dibuja el $\overline{AP}$ y el $\overline{A'P}$. Para estos segmentos, puedes usar un color diferente a los que usaste para hacer tu dibujo.
 - b. Mide los dos segmentos que acabas de dibujar. ¿Qué encuentras?
 - c. Mide el $\angle APA'$.
2. Ahora considera el punto C y su imagen, el punto C' .
 - a. Agrega $\overline{CP}$ y $\overline{C'P}$ a tu figura. De nuevo, puedes querer usar un color diferente.
 - b. Mide estos dos segmentos. ¿Qué encuentras?
 - c. Mide el $\angle CPC'$.
3. Finalmente, considera el punto D y su imagen, el punto D' .
 - a. Agrega $\overline{DP}$ y $\overline{D'P}$ a tu figura.
 - b. Mide estos dos segmentos. ¿Qué encuentras?
 - c. Mide el $\angle DPD'$.
4. Compara los tres ángulos que mediste. ¿Qué percibes?



El logotipo de reciclaje, con sus flechas que giran infinitamente, tiene simetría de rotación. (¿Puedes determinar el ángulo de rotación?)

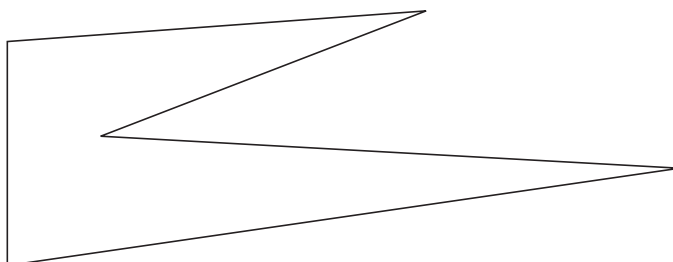


MATERIALES

- regla
- transportador

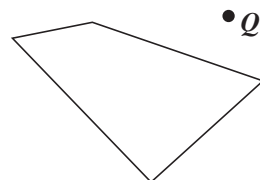
Serie de problemas F

1. Bosqueja esta figura. Usa lo que descubriste en la Serie de problemas E para girar la figura sobre el punto P , usando 140° como ángulo de rotación.



• P

2. Bosqueja esta figura. Dibuja una copia de la figura girada sobre el punto Q , usando -80° como ángulo de rotación. Recuerda: Un ángulo de rotación negativo significa una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj.



3. ¿Cuando rotas una figura, ¿es la imagen *congruente* a la original, *semejante* a la original, o *ninguna de las dos*? Explica cómo lo sabes.

Comparte & resume

Supón que tienes un transportador, una regla o un lápiz, pero no tienes otro papel. Se te pide rote el segmento de la derecha, usando el punto como el centro de rotación.

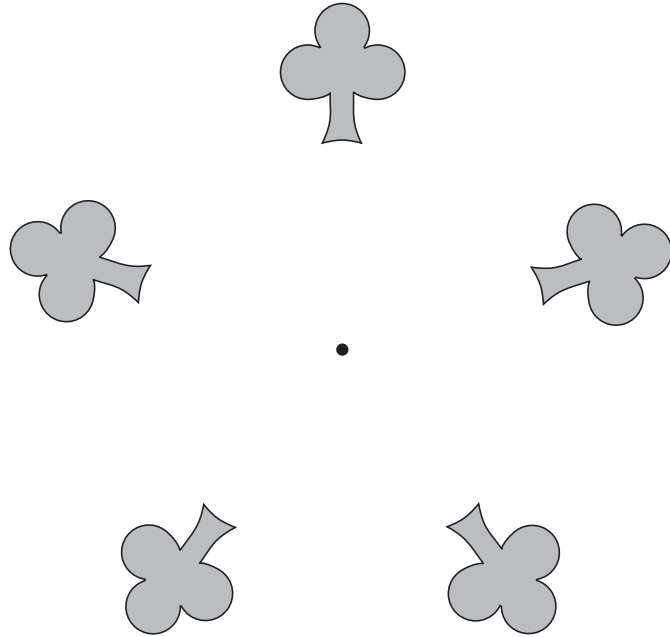
1. ¿Qué información adicional necesitas?
2. Supón que te dan la información que necesitas. ¿Cómo realizarás la rotación del segmento?

•

Ejercicios por tu cuenta

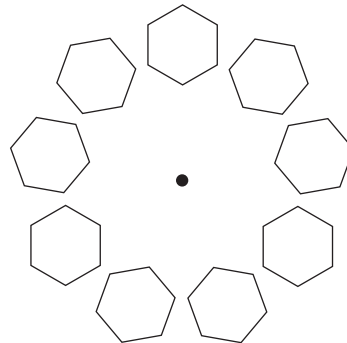
Practica & aplica

1. Copia esta figura en papel de calcar. Después, rota el trazo hasta que la copia coincida con el original.



- a. ¿Cuántas veces tienes que rotar el trazo y hacerlo coincidir con el original, para regresar a la posición inicial?
- b. ¿Cuál es el ángulo de rotación?
- c. Describe cómo se relaciona el ángulo de rotación con el número de elementos idénticos.

2. Copia esta figura en papel de calcar. Después rota el trazo hasta que la copia coincida con el original.



- a. ¿Cuántas veces tienes que rotar el trazo y hacerlo coincidir con el original, para regresar a la posición inicial?
- b. ¿Cuál es el ángulo de rotación?
- c. Describe cómo se relaciona el ángulo de rotación con el número de elementos idénticos.

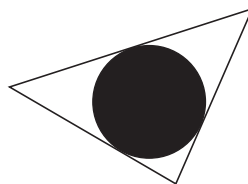


A continuación se muestran tres letras del alfabeto que tienen simetría de rotación. ¿Puedes encontrar las otras?

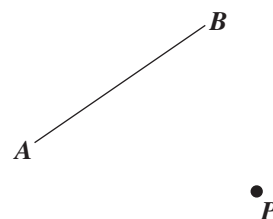
S O N



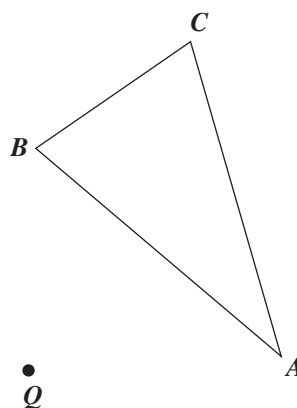
3. Usa el siguiente como tu elemento de diseño.



- a. Elige un centro de rotación y haz un diseño con un ángulo de rotación de 72° . Usa papel de calcar si lo necesitas.
- b. Usa este elemento de diseño para hacer otro diseño con un ángulo de rotación de 72° . Usa un centro de rotación diferente.
4. Copia el $\overline{AB}$ y el punto P .
Crea un diseño con simetría de rotación girando el segmento 60° sobre el punto P varias veces.



5. Copia el $\triangle ABC$ y rótao -60° sobre el punto Q . Recuerda: Un ángulo de rotación negativo significa rotar en la dirección de las manecillas del reloj.

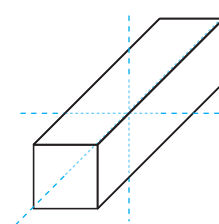


Haz tu trabajo para los Ejercicios 6 y 7 sin usar papel de calcar.

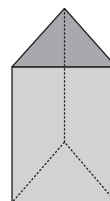
6. Dibuja un cuadrilátero $ABCD$. Elige un punto para que sea el centro de rotación y rota tu cuadrilátero 80° alrededor de este punto. Usa notación prima para rotular la imagen de los vértices. Por ejemplo, la imagen del vértice A será el vértice A' .
7. Dibuja un pentágono $EFGHI$. Elige un punto para que sea el centro de rotación y rota tu pentágono -130° alrededor del centro. Usa notación prima para rotular la imagen de los vértices. Por ejemplo, la imagen del vértice E será el vértice E' .

8. Haz un copo de nieve como el que hiciste en la Serie de problemas A (o usa el que ya hiciste). Desdóblalo completamente.
 - a. ¿Cuántos ejes de simetría tiene tu copo de nieve?
 - b. ¿Cuál es la relación entre tus dobleces y los ejes de simetría?
 - c. Dobla tu copo de nieve de nuevo. Elige un diseño que hayas cortado y haz un bosquejo de éste. Desdobla el copo de nieve y busca ese diseño, usa tu bosquejo para compararlos. ¿Cuántas copias de éste puedes encontrar? ¿Dónde están?
 - d. ¿Cuál es el ángulo de rotación de tu copo de nieve?
9. Los objetos tridimensionales pueden tener simetría de rotación. Un objeto tridimensional con simetría de rotación tiene un *eje de rotación* en vez de un centro de rotación.

Mientras que una figura bidimensional sólo puede tener un centro de rotación, un objeto tridimensional puede tener más de un eje de rotación. Este prisma rectangular tiene tres ejes de rotación.



- a. Las bases del siguiente prisma son triángulos equiláteros. ¿Cuántos ejes de rotación tiene este prisma triangular? Explica dónde están. (Si es necesario, puedes usar un diagrama para explicarlo.)



- b. Para cada eje de rotación que encuentres, ¿cuál es el ángulo de rotación?

10. Crea tu propio diseño con simetría de rotación.
 - a. ¿Cuál es el ángulo de rotación?
 - b. ¿Cuántos elementos idénticos tiene tu diseño?
 - c. ¿Tiene simetría de reflexión tu diseño? De ser así, ¿cuántos ejes de reflexión tiene?
11. Enumera por lo menos cuatro objetos o figuras, naturales o artificiales, que tengan simetría de rotación. ¿Cuál de tus ejemplos tiene también simetría lineal?



Recuerda

Los prismas se nombran según la forma de sus bases.

En tus propias palabras

Describe en qué se parecen y en qué se diferencian la rotación y la reflexión. Da ejemplos.



Recuerda

El *máximo común divisor* es el número mayor que divide exactamente dos o más enteros.

Repaso mixto

- 12.** Si el ángulo de rotación para una figura con simetría de rotación es un entero, también es un factor de 360. Considera lo que podría suceder si intentaras crear una figura con una medida de ángulo que no fuera un factor de 360, tal como 135° .

Elige un punto A y un centro de rotación. Rota el punto A 135° y rota la imagen 135° . Sigue rotando las imágenes hasta que regreses al punto inicial. (Al realizar las rotaciones, pasarás el punto original, porque has dado una vuelta completa.)

- ¿Cuántos círculos completos hiciste?
- ¿Cuántas copias del punto tienes en tu dibujo?
- Hay un ángulo de rotación más pequeño que 135° que podrías usar para crear este mismo diseño. ¿Cuál es su medida?
- Ahora encuentra el *máximo común divisor* (MCD) de 135 y 360.
- Divide 135 y 360 entre tu respuesta a la Parte d.
- Compara tus respuestas para las Partes a, b y c con tus respuestas para las Partes d y e. ¿Qué percibes?
- Supón que creaste una figura rotando un elemento de diseño 80° cada vez. ¿Qué ángulo de rotación tendrá el diseño final? Prueba tu respuesta rotando un solo punto.

Calcula el valor de c en cada ecuación.

13. $\sqrt[c]{8} = 2$

14. $\sqrt[c]{81} = 3$

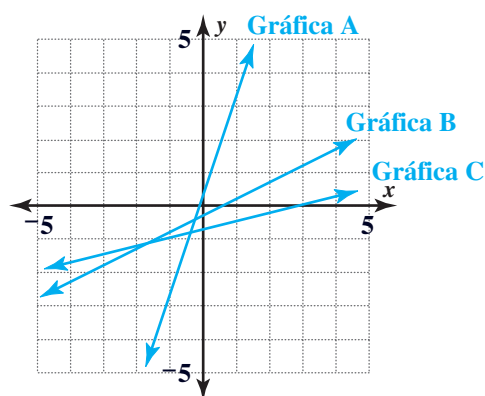
15. $\sqrt[4]{1} = c$

- 16.** Relaciona cada ecuación con una gráfica.

a. $x - \frac{3}{5} = 2y$

b. $3y - 4x - 1 = 8x - y$

c. $x + 5 = 4(y + 2)$



- 17.** Escribe una ecuación para representar el valor de A en términos de t .

t	0	1	2	3	4
A	9	27	81	243	729

5.3

Traslación y combinación de transformaciones

VOCABULARIO

traslación

Ahora explorarás una tercera clase de transformaciones: la **traslación**. Puedes pensar acerca de trasladar una figura como moverla una distancia específica en una dirección específica. A diferencia de las rotaciones y reflexiones, la imagen de una traslación y la figura original tienen la misma *orientación*, es decir, la parte superior todavía es la parte superior y la parte inferior todavía es la parte inferior. La traslación también se conoce como *deslizamiento* o *desplazamiento*.

MATERIALES

regla

Piensa & comenta

Observa esta serie de figuras.



Si la figura original es la de la izquierda, ¿qué distancia se trasladó en cada etapa y en qué dirección?

Si la figura original es la de la derecha, ¿qué distancia se trasladó en cada etapa y en qué dirección?

Investigación 1 Traslación

VOCABULARIO

vector

Para describir una traslación necesitas dar tanto una distancia como una dirección. Se pueden usar *vectores* para describir traslaciones. Un **vector** es un segmento de recta con una punta de flecha. La longitud del segmento te indica la distancia que se traslada y la punta de flecha da la dirección. Los dos vectores siguientes, por ejemplo, indican traslaciones de la misma longitud pero direcciones diferentes.

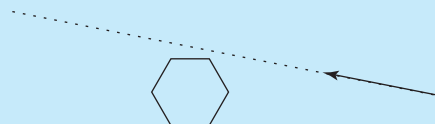


EJEMPLO

Traslada este hexágono usando el vector dado.

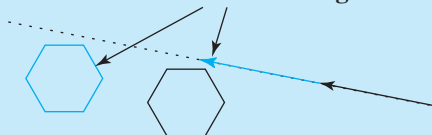


Primero, traza el hexágono y el vector. Extiende el vector con una recta punteada. Esta recta te ayudará a mantener la orientación de la figura.

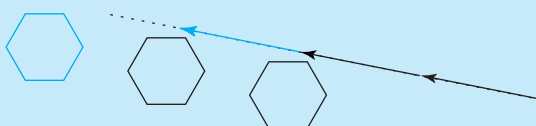


Ahora, desplaza el *original* en la dirección indicada por el vector, hasta que la *punta* del vector trazado toque la *cola* del vector original. Manteniendo el vector original bajo la línea punteada en el trazo, traza de nuevo el hexágono original y el vector.

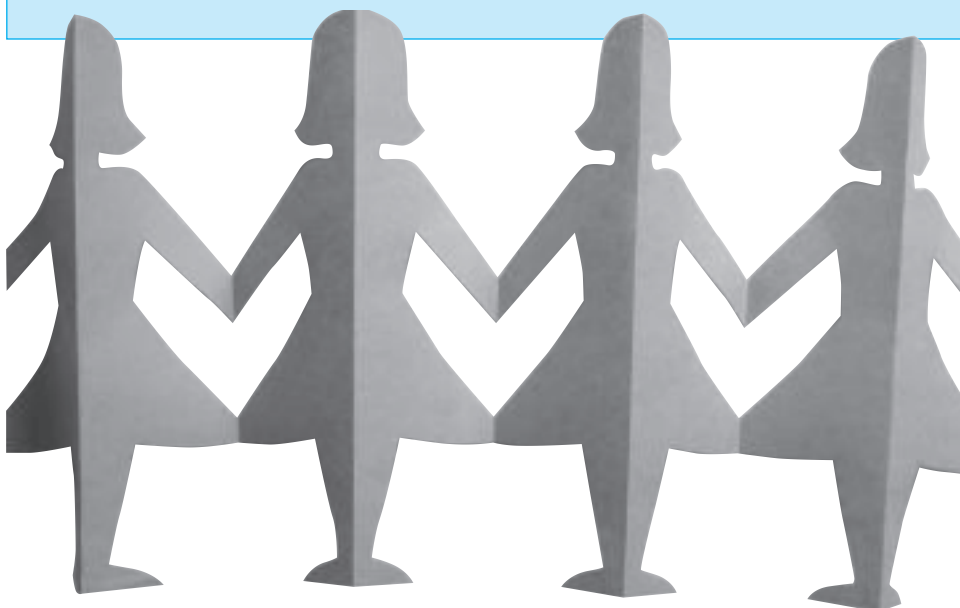
Mostrando el original



Puedes repetir el proceso. Al deslizar el hexágono original y el vector, coloca el vector original de manera que su cola toque la punta del segundo vector.



Si pudieras continuar este patrón infinitamente, en ambas direcciones, el resultado tendría *simetría de traslación*.



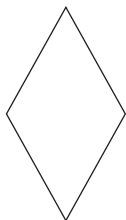
MATERIALES

papel de calcar

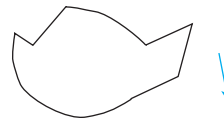
Serie de problemas A

Usa el vector dado para trasladar la figura y crear un diseño con cuatro copias de la figura.

1.



2.



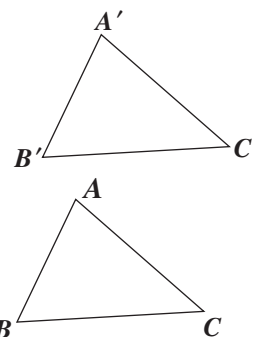
- Ahora, dibuja tu propia figura y el vector de traslación. Usa papel de calcar para crear un diseño con por lo menos tres copias de tu figura.
- ¿Son *congruentes*, *semejantes* o *ninguna de las dos* las figuras y sus imágenes trasladadas? Explica.

MATERIALES

- papel de calcar
- regla métrica

Serie de problemas B

Ahora examinarás más de cerca lo que sucede en una traslación. El triángulo ABC se ha trasladado por el vector dado para crear una imagen, el $\triangle A'B'C'$.



- Dibuja la figura. En tu copia, conecta el punto A y su imagen, punto A' . También conecta los puntos B y C con sus imágenes.
- Mide las longitudes de $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$. Compara estas longitudes con la longitud del vector.
- Imagina que extiendes cada uno de los $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ para formar rectas. Supón que también extendiste el vector para formar una recta. ¿Qué será cierto sobre estas cuatro rectas?
- Supón que tienes un solo punto y un vector. ¿Cómo puedes trasladar el punto por un vector sin usar papel de calcar?

•



Cada uno de estos diseños japoneses de márgenes implica simetría de traslación.



Comparte & resume

En tus propias palabras, explica qué es una *traslación*. Asegúrate de incluir la información necesaria para realizar una traslación.

Investigación 2 Combina transformaciones

MATERIALES

- papel de calcar
- geoespejo (opcional)
- transportador
- regla

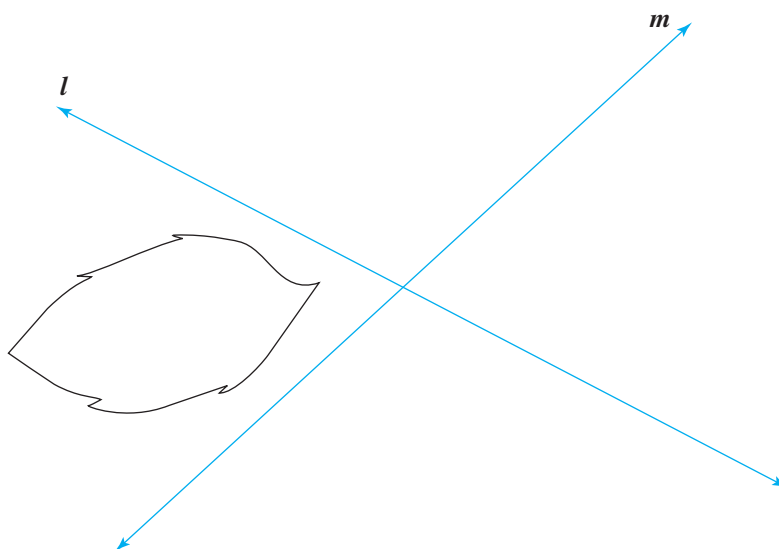


¿Qué sucede cuando combinas dos transformaciones? Por ejemplo, supón que reflejas una figura y después reflejas su imagen.

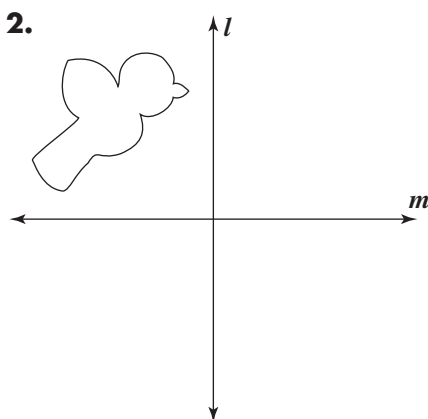
Serie de problemas C

Considera lo que sucede cuando reflejas dos rectas que se intersectan. Copia cada figura. Refleja la figura sobre la recta l y después refleja su imagen sobre la recta m . Puedes usar un geoespejo para hacer las reflexiones.

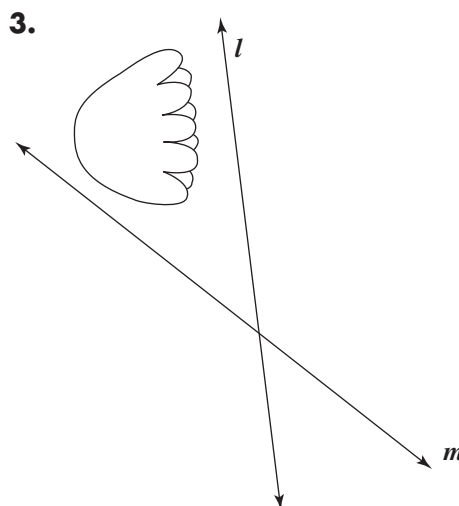
1.



2.



3.

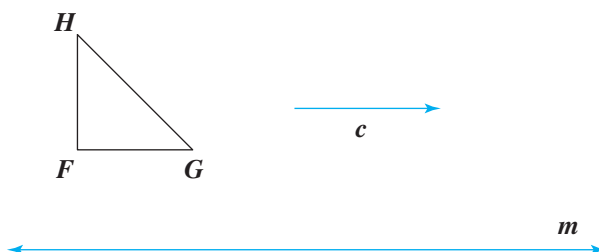


4. Las imágenes finales en los Problemas 1 al 3, se podrían haber creado con una sola transformación de la figura original. Describe esa transformación.

Has visto las combinaciones de dos reflexiones. Existen muchas otras maneras de combinar transformaciones. A continuación, explorarás cómo combinar una reflexión y una traslación.

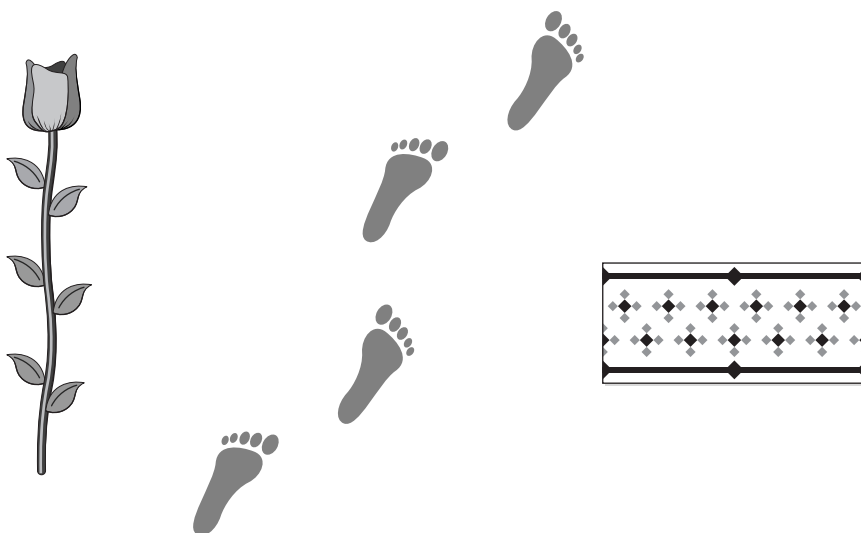
Serie de problemas D

1. El vector c es paralelo al eje de reflexión, la recta m . Traza el $\triangle FGH$, el vector c y la recta m .



- a. Refleja el $\triangle FGH$ sobre la recta m .
 - b. Traslada la imagen de la Parte a por el vector c para obtener una segunda imagen.
2. Ahora trata de invertir el orden de las transformaciones.
 - a. Traslada el $\triangle FGH$ del Problema 1 por el vector c .
 - b. Refleja la imagen que creaste en la Parte a sobre la recta m .
 3. ¿Qué percibes sobre la relación entre las imágenes finales en los Problemas 1 y 2?

La combinación de una reflexión sobre la recta y una traslación por un vector paralelo a esa recta se llama *reflexión deslizante*. Las huellas en la arena, las hojas en un tallo y los patrones en los bordes de un papel tapiz pueden mostrar una reflexión deslizante.



Comparte & resume

1. ¿Cuál es la relación entre la figura original y la imagen final cuando reflejas la figura sobre dos rectas que se intersecan?
2. Describe una reflexión deslizante y da un ejemplo de una.

Investigación de laboratorio

Haz teselados

El artista holandés M. C. Escher (1898–1972) a menudo trasladó, rotó o reflejó figuras o colecciones de figuras para crear imágenes fascinantes.

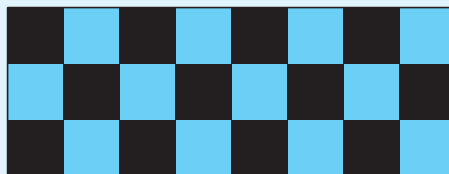


Dibujo de simetría E71 por M.C. Escher. © 1999 Cordon Art-Baarn-Holland. Todos los derechos están reservados.



Los temas matemáticos de simetría, rellenado del plano y aproximación al infinito son prominentes en muchos de los trabajos famosos de Escher.

Un diseño que usa una o más figuras para cubrir un plano sin dejar ningún espacio o traslape se llama *teselado*. Se pueden usar muchas figuras para *teselar*. Una de las figuras más fáciles de teselar es el cuadrado.



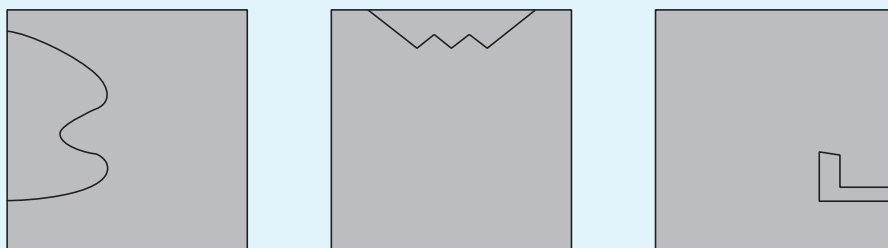
Puedes usar un cuadrado con las técnicas de reflexión, rotación y traslación para crear tu propio trabajo artístico de teselado.

MATERIALES

- cuadrados de papel rígido
- tijeras
- cinta pegante
- cartulina
- marcadores o crayones

Pruébalo

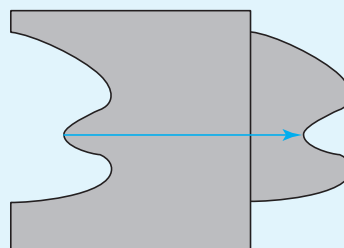
1. Comienza con una hoja cuadrada de papel. En un lado del cuadrado, dibuja una figura. La figura debe ser de una sola pieza que comience y termine en el mismo lado. Aquí hay unos ejemplos.



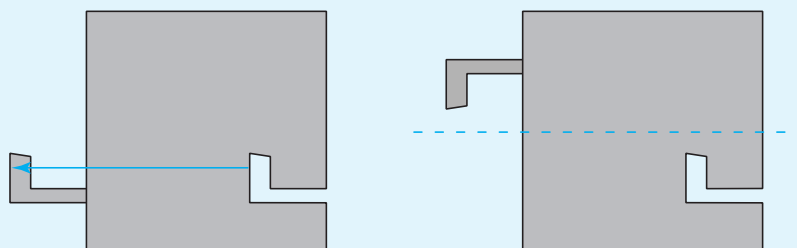
Corta cuidadosamente la figura que dibujaste, mantenla de una sola pieza.

2. Ahora tienes algunas opciones para mover tu figura.

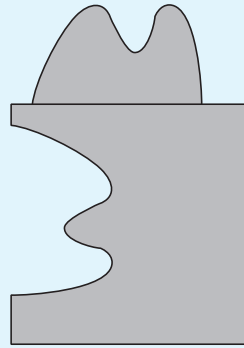
- Puedes trasladarla al otro lado del cuadrado.



- Puedes trasladarla al otro lado del cuadrado, como se muestra y después reflejarla sobre una recta a través del centro del cuadrado y paralelamente a la dirección que trasladaste.

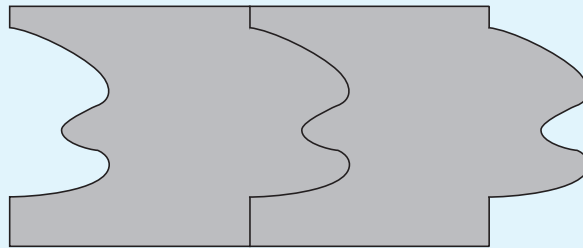


- Puedes rotarla 90° sobre uno de los vértices adyacentes a tu figura. La figura a continuación se ha trasladado sobre la esquina superior izquierda del cuadrado.



Elige una de estas tres opciones y pega la figura al cuadrado en el lugar donde la moviste.

3. Ahora puedes crear un teselado. Coloca tu figura en una hoja de papel grande o en cartulina y trázala. Después, decide cómo mover tu figura (mediante una traslación, rotación o alguna combinación de transformaciones) de manera que el recorte del trazo encaje con la pieza agregada a tu figura. Traza de nuevo la figura.



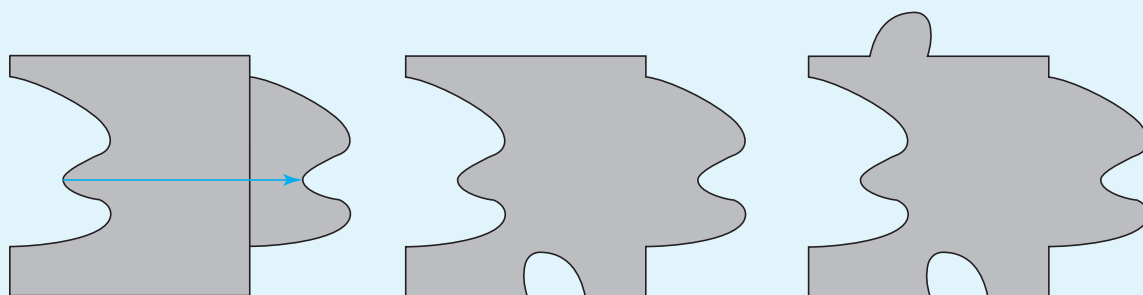
4. Repite el proceso varias veces, rellenando tu papel o cartulina con tu figura. ¡Tienes un teselado!

Pruébalo otra vez

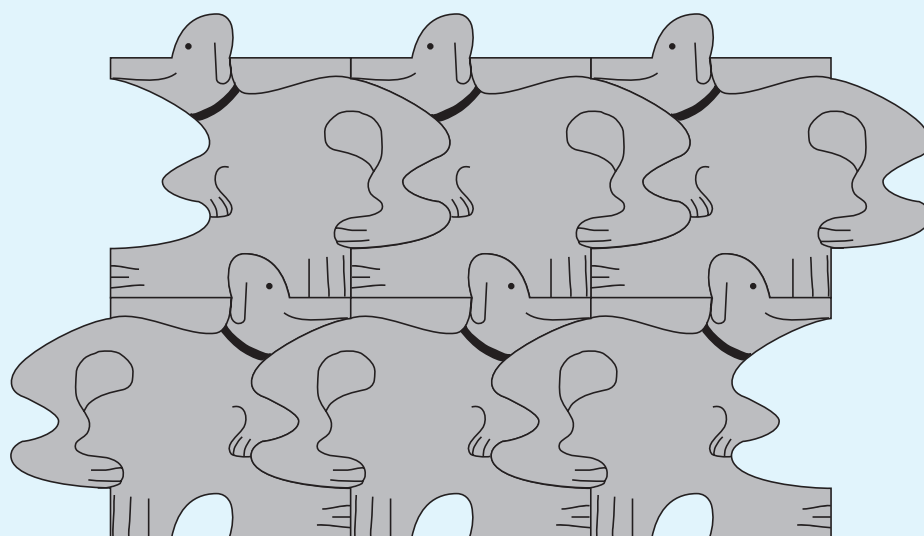
Para crear teselados más interesantes, puedes cortar figuras de dos lados de un cuadrado. Después de crear el teselado, puedes colorear cada figura para que parezcan pájaros, peces, gente o cualquier otra cosa que te puedas imaginar.

5. Comienza con un nuevo cuadrado. En un lado del cuadrado, dibuja una figura. Corta la figura y trasládala, trasládala y refléjala, o róta la como se describe en el Paso 2. Vuelve a unir la figura al cuadrado.
6. Ahora has usado dos de los cuatro lados de tu cuadrado. Elige uno de los otros lados y dibuja la nueva figura. Corta la figura y trasládala, trasládala y refléjala, o róta la. Tendrás que elegir tu regla basándote en el lado del cuadrado que se deja para unirle la figura.

Por ejemplo, aquí hay una traslación de una figura y luego una traslación y una reflexión de otra figura.



7. Traza tu figura en una hoja de papel grande o en cartulina.
 - a. Decide cómo mover la figura de manera que el *primer* corte del trazo encaje correctamente con la pieza unida. Trata la figura de nuevo.
 - b. Ahora mueve la figura de manera que el *segundo* corte encaje correctamente y trázala.
 - c. Continúa el proceso hasta que hayas creado un teselado. Decora las figuras de la manera que quieras.



¿Qué aprendiste?

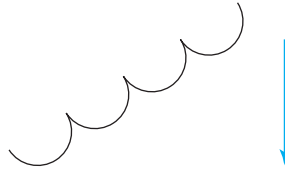
8. Supón que *trasladas* un recorte para crear una figura. ¿Cómo moverías la figura para hacer un teselado?
9. Supón que *trasladas* y *después reflejas* un recorte para crear una figura. ¿Cómo moverías la figura para hacer un teselado?
10. Supón que *rotas* un recorte para crear una figura. ¿Cómo moverías la figura para hacer un teselado?

Ejercicios por tu cuenta

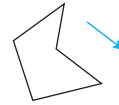
Practica & aplica

En los Ejercicios 1 al 3, traslada la figura por el vector dado para crear un diseño con tres elementos.

1.



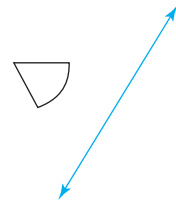
2.



3.

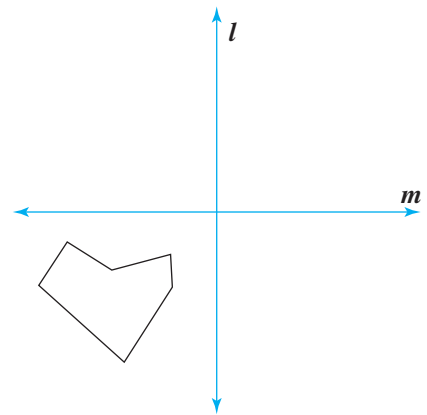


4. Alguien te pidió que reflejaras esta figura sobre la recta l y que después reflejaras la imagen sobre la misma recta. Describe una manera más simple de encontrar la imagen final.

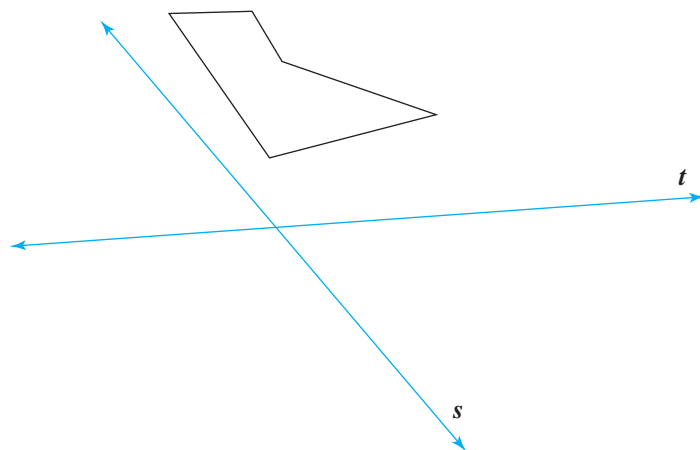


5. Copia cuidadosamente esta figura incluyendo las rectas l y m , que son perpendiculares.

- Refleja la figura sobre la recta l y su imagen sobre la recta m .
- Describe una transformación simple que te daría la misma imagen final. Provee tantos detalles como te sea posible.



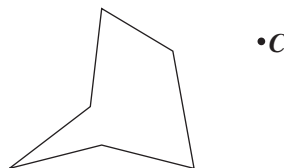
6. Copia cuidadosamente esta figura.



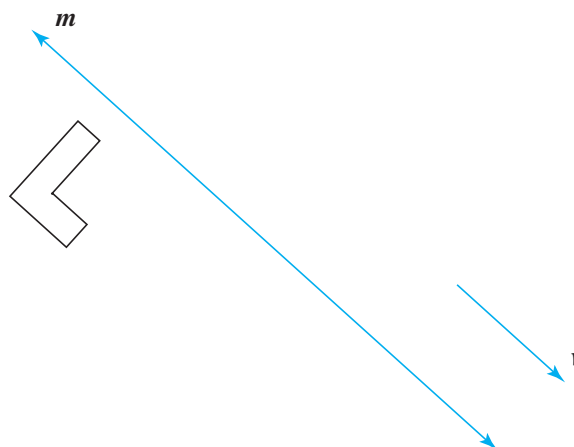
- Refleja la figura sobre la recta t y refleja la imagen sobre la recta s .
- Describe una transformación simple (reflexión, rotación o traslación) que te daría la misma imagen final. Provee tantos detalles como te sea posible.



7. Copia cuidadosamente esta figura.



- Rota la figura sobre el punto C a través de un ángulo de 30° . Después rota la imagen sobre el punto C a través de un ángulo de 40° .
 - ¿Cuál transformación sencilla de la figura original te daría la misma imagen final, como en la Parte a?
 - Ahora, rota la figura original sobre el punto C a través de un ángulo de 30° y rota la imagen sobre el punto C a través de un ángulo de -40° .
 - ¿Cuál transformación sencilla de la figura original te daría la misma imagen final, como en la Parte c?
8. Copia cuidadosamente esta figura incluyendo el eje de reflexión y el vector. Sigue las instrucciones para realizar una reflexión deslizante.



- Refleja la figura sobre la recta m .
- Para completar la reflexión deslizante, traslada la imagen por el vector v .
- Toma la imagen final de la Parte b y refléjala sobre la recta m . Después, traslada esta figura por el vector v .
- Tu imagen en la Parte c se puede crear con una sola transformación del original. Provee tanta información como te sea posible acerca de esa transformación.

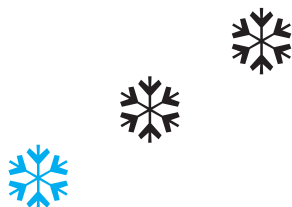


Cada uno de los siguientes diseños de margen japoneses involucra reflexiones deslizantes.



En los Ejercicios 9 y 10, se trasladó la figura original (de color anaranjado). Determina la longitud y dirección de la traslación. Regístrala como un vector en tu papel.

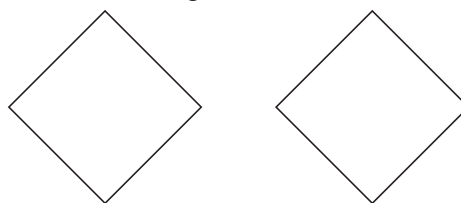
9.



10.

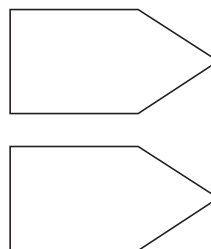


11. Tala y Evan hablan sobre esta figura.



Tala dijo que fue creada con una reflexión, pero Evan piensa que se creó con una traslación.

- ¿Tendrá razón Tala? Trata de determinar un eje de reflexión que funcione.
- ¿Tendrá razón Evan? Trata de determinar un vector de traslación que funcione.
- Aquí hay un par de figuras que se podrían haber creado mediante traslación o reflexión. Determina el eje de reflexión y el vector de traslación que funcionen.



- Crea un diseño que podría crearse mediante traslación o reflexión.
- Una figura debe tener una clase de simetría particular para verse igual al ser reflejada o trasladada. Revisa de nuevo los elementos básicos de este ejercicio. ¿Qué clase de simetría se necesita?

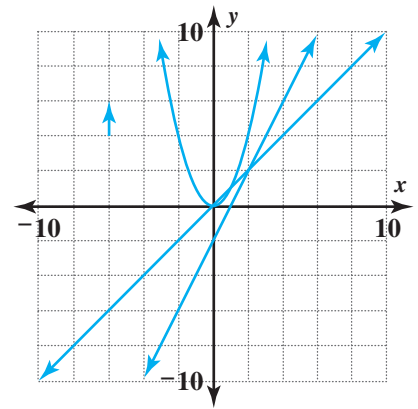
- 12.** En las Partes a, b y c, se da una ecuación. Las tres ecuaciones se grafican a la derecha. Dibuja cómo se vería cada gráfica trasladada por un vector dado.

a. $y = x$

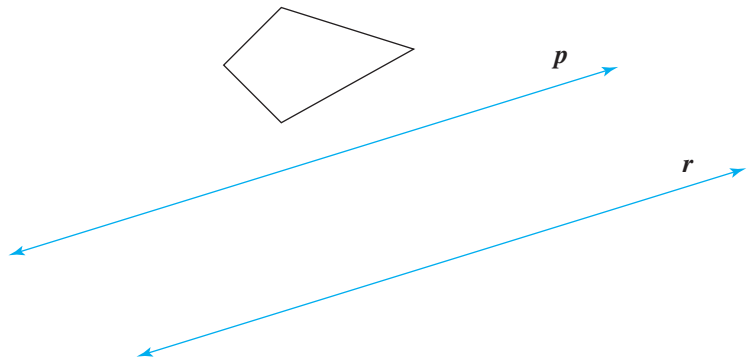
b. $y = x^2$

c. $y = 2x - 2$

- d.** Para las Partes a, b y c, escribe la ecuación de la nueva gráfica que creaste.



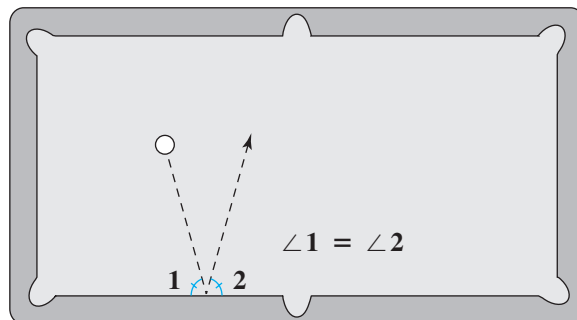
- 13.** Supón que reflejaste esta figura sobre la recta p y reflejaste su imagen sobre la recta r .



¿Cuál transformación simple: *reflexión*, *rotación* o *traslación*, daría la misma imagen final?

- 14. Deportes** Jesse quiere lucirse con sus amigos con sus destrezas en los billares. Ella quita todas las bolas de la mesa, excepto la bola blanca.

Cuando una bola pega en la *banda*, o rebota, en el lado de la mesa, el ángulo que hace al alejarse de la banda es el mismo que el ángulo que hizo cuando se acercó a la banda.

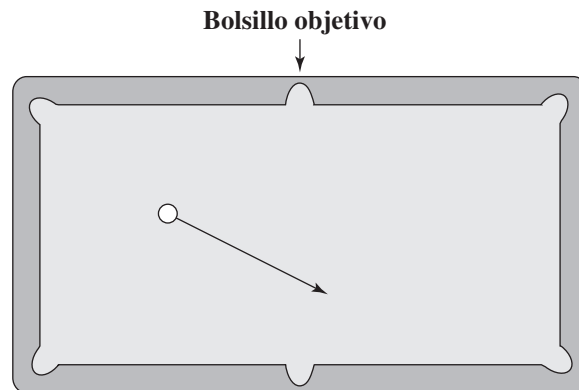


En tus propias palabras

Supón que tienes dos triángulos congruentes en una hoja de papel. ¿Crees que siempre puedes transformar uno en el otro usando alguna combinación de traslaciones, rotaciones y reflexiones? Explica tu razonamiento.

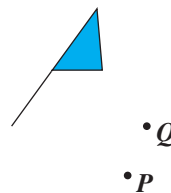
- Las rectas a lo largo de las cuales viaja la bola se relacionan mediante simetría de reflexión. Usa la figura de la página 325 para determinar el eje de simetría.
- Jesse retó a su amigo Marcus a meter la bola blanca en un bolsillo después de rebotarla exactamente dos veces en las bandas de la mesa. Marcus realizó la siguiente tacada que falló.

Copia cuidadosamente la siguiente mesa y determina la trayectoria que recorrió la bola. Marcus intentó meter la bola en el bolsillo lateral marcado.



- Jesse usó su conocimiento de las reflexiones para estimar una tacada que funcionara. Completa estos pasos para determinar la tacada que Marcus debió haber usado.
 - En otra hoja de papel copia la tabla y la bola de la Parte b.
 - Imagina que la orilla interna de la banda derecha de la mesa es un eje de reflexión. Determina la imagen del bolsillo lateral objetivo cuando la reflejes sobre esa recta.
 - Ahora imagina que la orilla interna de la banda inferior de la mesa es un eje de reflexión. Refleja la imagen del paso anterior sobre esta recta.
 - Dibuja una recta que conecte esta imagen final con la bola blanca. Esta recta muestra la dirección en la que se debió haber hecho la tacada.
 - Verifica la tacada determinando la trayectoria que debería seguir la bola.

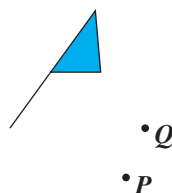
15. Copia con cuidado esta figura.



- Rota la bandera 50° sobre el punto P y después rota la imagen -30° sobre el punto Q .

- b. Extiende las astas de la bandera original de la imagen final hasta que se intersequen los dos segmentos. ¿Cuál es la medida del ángulo entre éstos?
- c. Ahora rota la bandera original a través del ángulo que diste en la Parte b, usa el punto de intersección que creaste en la Parte b.
- d. Ahora rota la bandera original una vez más. Usa la misma medida de ángulo de la Parte b, pero esta vez usa como centro de rotación *cualquier punto* que no hayas usado. (Por ejemplo, usa uno de los vértices de la bandera.)
- e. Compara las imágenes en la Parte c y d y la imagen final de la Parte a. ¿Qué observas sobre sus orientaciones?

16. Reto Copia con cuidado esta figura.



- a. Rota la bandera 90° sobre el punto P . Después rota la imagen -90° sobre el punto Q . ¿Qué tipo de transformación sencilla de la bandera original daría la misma imagen final?
- b. Haz una copia de la figura. Rota la bandera a 90° sobre el punto P y después rota la imagen 90° sobre el punto Q . ¿Qué transformación sencilla de la bandera original te daría la misma imagen final?
- c. Ahora rota la bandera original 50° sobre el punto P y después rota la imagen -30° sobre el punto Q . (Si completaste el Ejercicio 15, te puedes referir a tu rotación en ese ejercicio.) Extiende las astas de tu bandera original y de la imagen final hasta que los dos segmentos se intersequen. ¿Cuál es la medida del ángulo entre éstas?
- d. Agrega los dos ángulos de rotación de la Parte a. Después haz lo mismo para los pares de ángulos de las Partes b y c.
- e. ¿Cómo están conectadas estas sumas con tus respuestas a las Partes a, b y c?

Repaso mixto

Determina el valor de m en cada ecuación.

17. $\sqrt[m]{512} = 8$

18. $\sqrt[3]{1,331} = m$

19. $\sqrt[3]{m} = 7$

20. $\sqrt[4]{m^4} = 10$

Reduce.

21. $\sqrt{50}$

22. $\sqrt{150}$

23. $\sqrt{162}$

24. $\sqrt{210,000}$

25. $\sqrt{147}$

26. $\sqrt{448}$

27. $2\sqrt{72}$

28. $0.1\sqrt{68}$

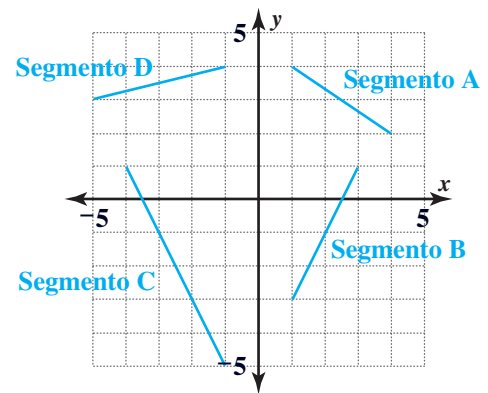
29. $-1.1\sqrt{171}$

30. Recuerda que puedes usar la fórmula de la distancia para calcular la longitud de un segmento, donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son las coordenadas de los extremos.

$$\text{distancia} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Usa la fórmula de la distancia para determinar la longitud de cada segmento.

- a. Segmento A
- b. Segmento B
- c. Segmento C
- d. Segmento D



31. Devon dijo: —Yo pensé en un número y le resté 5. Multipliqué la respuesta por 6 y dividí el resultado entre $\frac{1}{2}$. La respuesta es 36. ¿Cuál fue mi número?
32. Ian dijo: —Yo pensé en un número, lo dupliqué y después le sumé 10. Yo multipliqué la respuesta por -0.5 y dividí ese resultado entre 2. La respuesta fue -3.5 . ¿Cuál fue mi número?
33. Un tipo particular de girasol crece a una altura promedio de entre 7 y 10 pies. Escribe una desigualdad para expresar la altura promedio h , en pulgadas, de este tipo de girasol.
34. Boxed-In vende cajas de flete de forma cúbica con longitudes de arista en un rango de 12 centímetros a 1.5 metros. Escribe una desigualdad para representar el rango de los volúmenes posibles de v , en metros, para estas cajas.
35. Noventa y seis baldosas cubren un área de 6 por 12 pies.
- a. Escribe una ecuación que te ayude a determinar la longitud lateral de una baldosa, s .
 - b. ¿Cuál es la longitud lateral, en pulgadas, de una de las baldosas?

5.4

Dilatación

VOCABULARIO dilatación

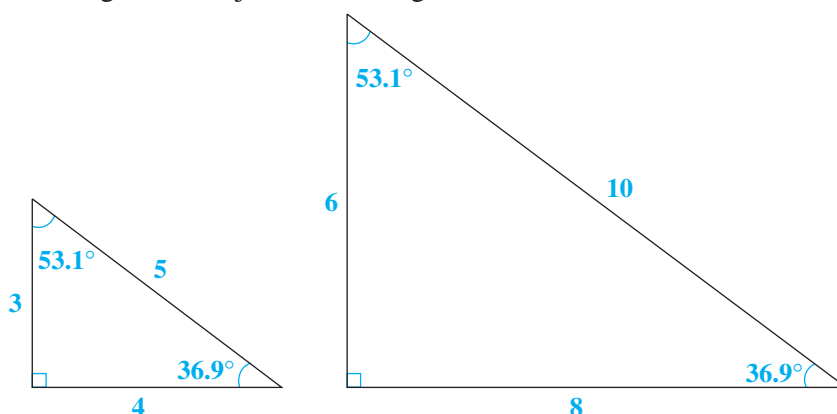


Recuerda

Los ángulos congruentes tienen la misma medida.

Has estudiado tres transformaciones que crean figuras congruentes. La cuarta transformación, la **dilatación** (llamada a veces *dibujo a escala*), crea figuras que son semejantes pero no necesariamente congruentes a la original.

Recordarás que los lados que coinciden, o *correspondientes*, de polígonos semejantes, como los siguientes triángulos son proporcionales. Es decir, las longitudes de los lados comparten una razón común. Los ángulos correspondientes de figuras semejantes son congruentes.



En esta lección, aprenderás dos maneras de crear figuras semejantes usando una dilatación.

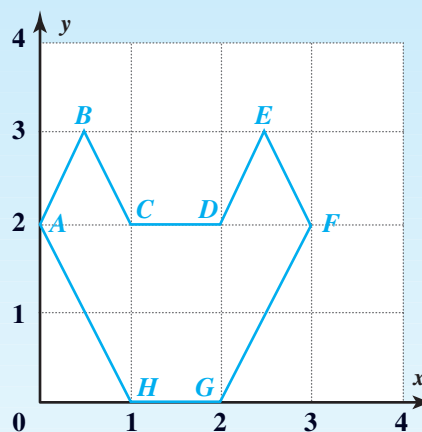
MATERIALES

- papel cuadriculado
- regla
- transportador

Explora

Copia la silueta de la cabeza de un gato en una cuadrícula de coordenadas.

- Determina las coordenadas de cada punto.
- Multiplica las coordenadas de cada punto por 2, para crear los puntos A' a H' . En otras palabras, si las coordenadas del punto A son (x, y) , las coordenadas del punto A' son $(2x, 2y)$.



- Grafica estos nuevos puntos en la misma cuadrícula y conéctalos en el mismo orden.

Acabas de *dibujar a escala* o *dilatar* la cabeza original del gato. ¿Es la nueva figura dilatada semejante a la original? ¿Cómo lo sabes?

Investigación 1 Dibujos a escala

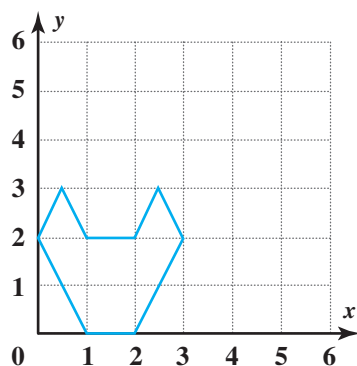
VOCABULARIO

dibujo a escala
factor de escala

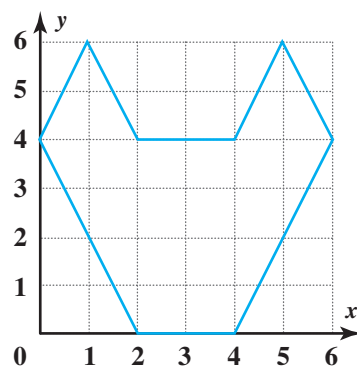
Al dilatar la cabeza del gato usaste el *método de coordenadas* para crear una figura semejante. Puedes usar este método (que implica multiplicar coordenadas de vértices por un número) para hacer *dibujos a escala* de figuras en una cuadrícula de coordenadas. Un **dibujo a escala** es un dibujo semejante a alguna figura original. El **factor de escala** es la razón entre las longitudes de los lados correspondientes de las figuras semejantes.

Cada par de figuras semejantes de diferentes tamaños tiene *dos* factores de escala asociados con las figuras. Uno describe la dilatación de la figura pequeña a la grande; y el otro describe la reducción de la figura grande a la pequeña.

Por ejemplo, todas las longitudes en tu dibujo a escala de la cabeza del gato son el doble de los lados correspondientes de la figura original, de manera que el factor de escala de la figura pequeña a la grande es 2. Y como las longitudes en la figura pequeña son $\frac{1}{2}$ de las longitudes en la figura grande, también puedes decir que el factor de escala de la grande a la pequeña es $\frac{1}{2}$.



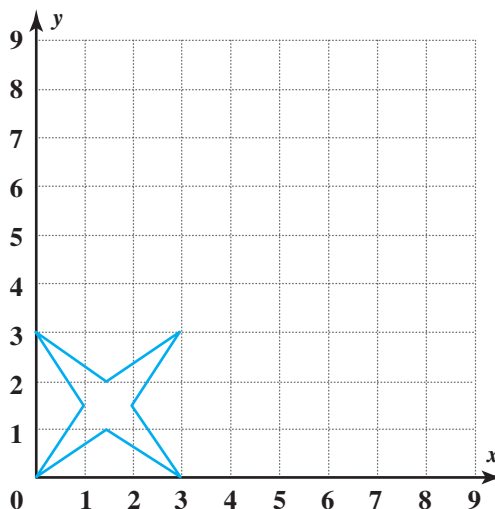
Original



Dibujo a escala

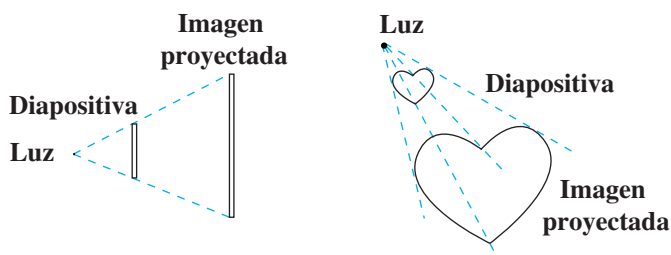
Serie de problemas A

1. Reduce la siguiente figura por un factor de escala de $\frac{1}{3}$.
2. Reduce la siguiente figura por un factor de escala de 3.



Algunos programas de computación para dibujo y animación usan una técnica parecida al método de coordenadas para crear dibujos a escala. El programa trata la pantalla como un plano de coordenadas y calcula la localización de los puntos. Los retroproyectores también hacen figuras semejantes, pero trabajan de manera diferente.

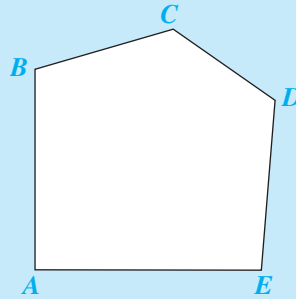
Los retroproyectores usan un bombillo brillante y una serie de lentes para proyectar figuras ampliadas sobre una pantalla. El propósito más importante de las lentes es enfocar la luz de manera que sólo salga de un punto. La luz enfocada pasa a través de la diapositiva y sobre la pantalla, esparciéndose para crear una imagen más grande.



Puedes hacer dibujos a escala al aplicar esta técnica llamada *método de proyección*.

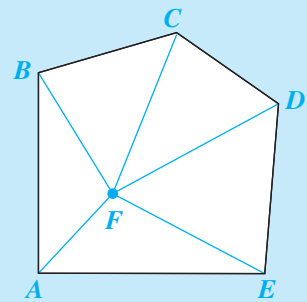
EJEMPLO

He aquí una manera de usar el método de proyección para hacer una figura semejante al polígono $ABCDE$ con lados con la mitad de largo, es decir, para hacer una figura reducida a $\frac{1}{2}$.

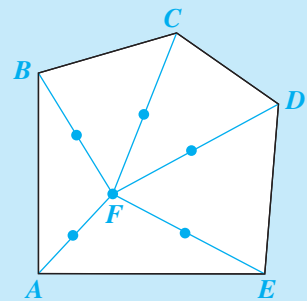


- Primero elige cualquier punto. Aunque el punto puede estar en el polígono, tal vez sea más fácil trabajar con un punto dentro o fuera de la figura, como el punto F .

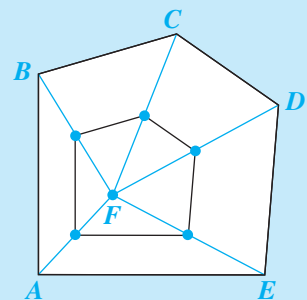
Después de elegir el punto, dibuja segmentos desde el punto hasta cada vértice del polígono.



- Para cortar un polígono por la mitad, determina los *puntos medios* de los segmentos FA a FE .



- Finalmente, conecta los puntos medios en orden para formar el nuevo polígono.



Un punto que te ayuda a formar una figura semejante, como el punto F , se llama *punto de proyección*.



Recuerda

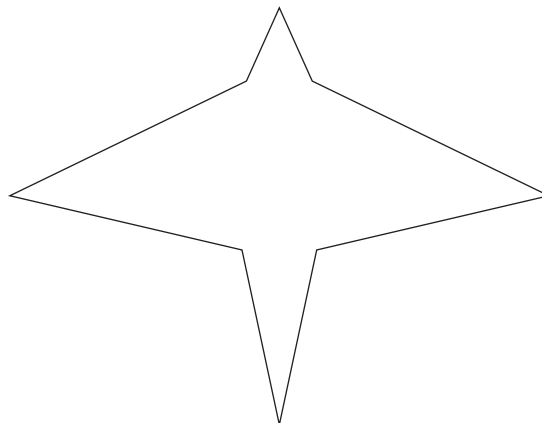
El *punto medio* de un segmento es el punto que yace a mitad de camino entre los extremos de un segmento.

MATERIALES

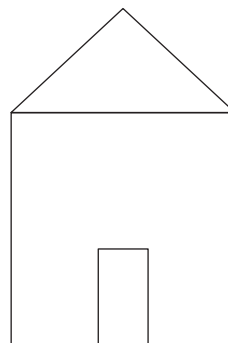
- papel de calcar
- regla

Serie de problemas B

1. Usa el método de proyección para reducir este polígono por un factor de $\frac{1}{2}$.



2. A continuación se muestra la figura de una casa.

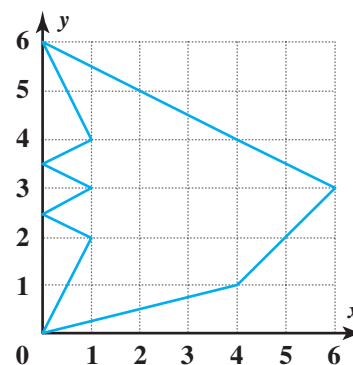


- a. Usa el método de proyección para crear una figura semejante más pequeña que esta figura original.
- b. Luego, modifica el método de proyección para ampliar la figura original por un factor de escala de 2.

Comparte & resume

A continuación, usarás los dos métodos que aprendiste para reducir esta figura.

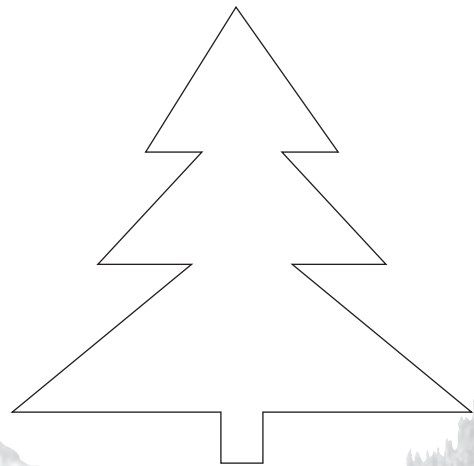
1. Usa el método de coordenadas para reducir la figura a $\frac{1}{2}$.
2. Usa el método de proyección para reducir la figura a $\frac{1}{2}$. Usa el origen como el punto de proyección.



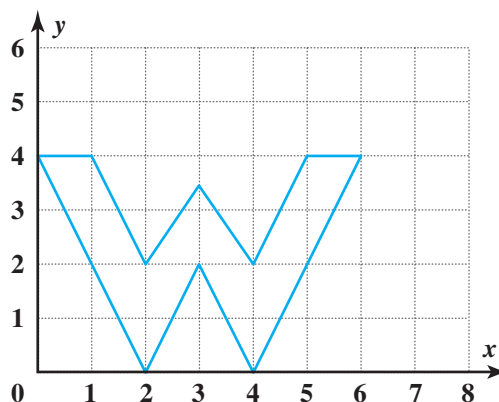
Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Santiago usó segmentos de recta para dibujar una figura en una cuadrícula de coordenadas. Después, multiplicó las coordenadas de todos los puntos por 1.5, graficó los puntos resultantes en una nueva cuadrícula y los conectó para formar una nueva figura.
 - a. Un segmento en el dibujo original de Santiago medía 2 pulgadas de largo. ¿De qué tamaño era el segmento correspondiente en el nuevo dibujo?
 - b. Un segmento en el nuevo dibujo medía 2 pulgadas de largo. ¿De qué tamaño era el segmento correspondiente en el dibujo original de Santiago?
2. Supongamos que usas el factor de escala dado en alguna Figura X para crear una Figura Y semejante. ¿Qué factor de escala utilizarías en la Figura Y para crear otra figura del mismo tamaño que la Figura X?
 - a. $\frac{1}{3}$
 - b. 5
 - c. 1
3. Considera cómo reducir una figura por un factor diferente a $\frac{1}{2}$.
 - a. Refiérete al Ejemplo en la página 332. ¿Cuál paso implica la $\frac{1}{2}$ de la distancia o longitud?
 - b. ¿Cómo podrías cambiar ese paso para crear una figura con lados de $\frac{1}{3}$ de largo como la original?
 - c. Inténtalo. Usa el método de proyección para reducir este polígono por un factor de $\frac{1}{3}$.

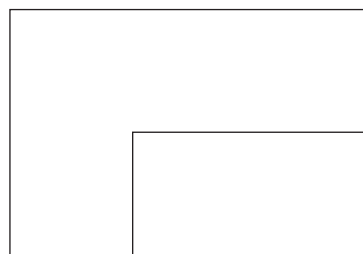


4. Usa el método de coordenadas para dilatar esta figura por un factor de 2.



5. Usa el método de proyección para cambiar la escala de esta figura.

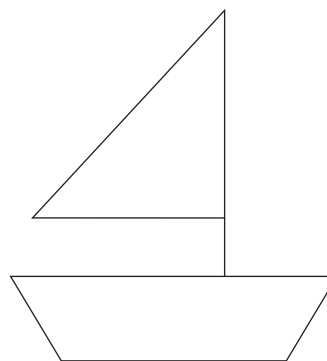
- a. Reduce la figura por un factor de $\frac{1}{4}$.



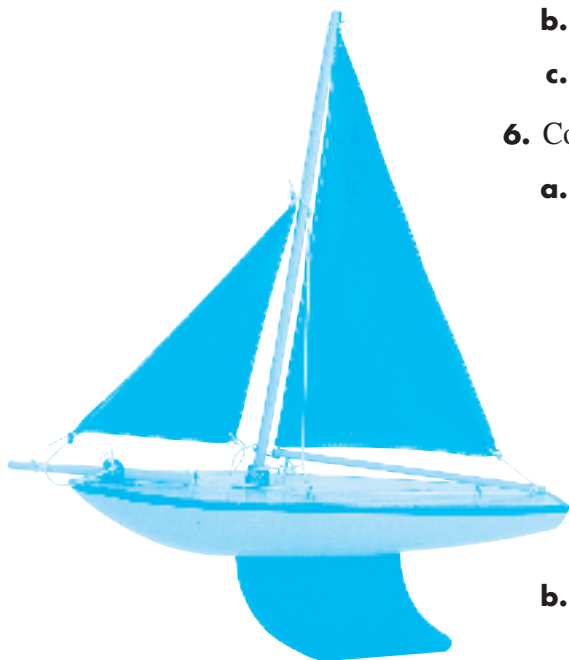
- b. Dilata la figura que creaste en la Parte a por un factor de 4.
c. ¿En que se diferencia la figura que creaste en la Parte b de la original?

6. Considera esta figura.

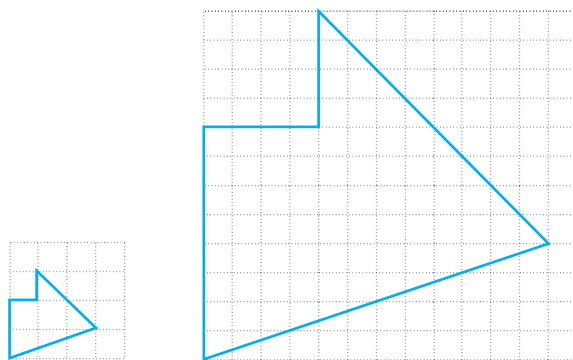
- a. Usa un factor de escala de $\frac{1}{3}$ para reducir esta figura.



- b. Ahora amplía la figura de tu respuesta a la Parte a por un factor de escala de 6.
c. Compara tu respuesta a la Parte b con la figura original. ¿Qué factor de escala cambiaría la figura original a esta nueva figura?



7. Usa segmentos de recta para dibujar una figura de tu invento en una cuadrícula de coordenadas. Amplía tu figura con el método de coordenadas. Indica el factor de escala que uses. Verifica el factor de escala de la figura original a la ampliación, revisando por lo menos dos pares de segmentos de recta.
8. Brian dilató la figura a la izquierda para obtener la figura de la derecha.



- a. Si Brian dilató la figura en un paso por un solo factor de escala, ¿qué factor de escala usó?
- b. Si Brian dilató la figura en dos pasos con dos factores de escala, ¿qué par de factores de escala podría haber usado? Enumera tres posibilidades.
9. ¿Qué obtendrías si usaras el método de coordenadas para dilatar una figura por un factor de 0?
10. **Bellas artes** Los *dibujos en perspectiva* parecen tridimensionales. El método de proyección para hacer dibujos a escala se relaciona con el método para hacer dibujos en perspectiva.



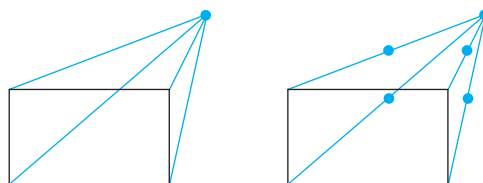
Esta técnica de dibujo en perspectiva no se conocía hasta el Renacimiento. La inventó el arquitecto italiano Brunelleschi, quien vivió hace aproximadamente 600 años.

En tu propio papel, sigue los siguientes pasos para hacer un dibujo en perspectiva de una caja. Usa un lápiz.

- a. Comienza dibujando un rectángulo. Éste será el frente de tu caja.



- b. Elige un punto fuera de tu rectángulo. Este punto se llama *punto de fuga* para tu dibujo. Conecta cada vértice con ese punto y después determina el punto medio de cada segmento conectado.



En tus propias palabras

Dibuja una figura simple y haz una copia a escala de ésta. Explica tu método, asegurándote de indicar el factor de escala que uses. Después, demuestra cómo alguien más puede probar que tus dos figuras son semejantes.



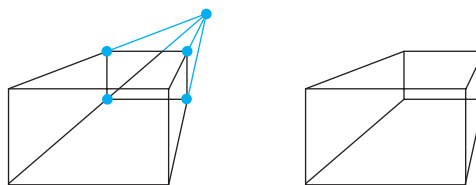
Recuerda

Hay 5,280 pies en una milla.

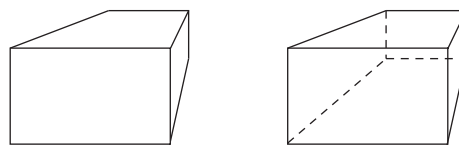


En esta pintura, las partes superiores e inferiores de los árboles forman dos líneas que se intersectan en un punto llamado *punto de fuga*.

- c. Conecta entre sí, en orden, los cuatro puntos medios que determinaste en la Parte b. Esto te da la parte posterior de la caja. Después, borra las líneas que los conectan con el punto de fuga.



- d. Para definir más la caja, borra las líneas que deberían estar ocultas en la parte de atrás de la caja o hazlas punteadas.



- e. Sigue los mismos pasos para hacer un dibujo en perspectiva de un prisma triangular. Esta vez, comienza con un triángulo (en vez del rectángulo) y sigue las instrucciones de las Partes a, b, c y d.
- f. En este método de dibujo tridimensional, ¿en qué paso creas un par de figuras semejantes? Explica.

11. Cada lado del Mile Square Park en Fountain Valley, California, mide exactamente una milla. Los funcionarios públicos de la ciudad quieren crear un mapa del parque que muestre a los visitantes la ubicación de las áreas de recreo, los bebederos, los baños y los senderos. Quieren que el mapa quepa en una hoja de papel estándar ($8\frac{1}{2}$ pulg por 11 pulg).

Debido a que los funcionarios públicos quieren que el mapa sea fácil de leer, éste debe ser lo más grande posible, es decir, el factor de escala del mapa al parque debe ser tan pequeño como sea posible. Si consideras sólo números enteros para los factores de escala, ¿cuál es el factor de escala más pequeño posible que podrían usar?

12. **Tecnología** Muchas fotocopadoras reducen o amplían las figuras automáticamente. Sin embargo, las fotocopadoras a menudo sólo tienen un número limitado de factores de escala. Supón que usas una fotocopadora que tiene tres ajustes para reducir o ampliar: 50%, 150% y 200%.

- a. Supón que quieres reducir una figura por un factor de escala de $\frac{1}{4}$. ¿Cómo lo harías?
- b. Supón que quieres ampliar una figura por un factor de escala de 3. ¿Cómo lo harías?
- c. ¿Cómo podrías reducir una figura al 75% de su tamaño original?

Repaso mixto

Determina el valor de t en cada ecuación.

13. $t^4 = 81$

14. $t^5 = 32$

15. $3^t = 729$

16. $4^t = 1,024$

17. **Ciencia biológica** En 1999, el árbol más alto del mundo era una secoya en Montgomery Woods State Reserve en el norte de California. El árbol mide 367.5 pies de alto.

- Se estima que el árbol tiene de 600 a 800 años. ¿En promedio, cuántas pulgadas creció el árbol, por año, durante su vida?
- Una secoya cercana mide 363.4 pies de alto. ¿Qué porcentaje de la altura del árbol más alto es este árbol?

Escribe una ecuación para representar el valor de y en términos de x .

18.

x	y
0	1.2
1	2.4
2	4.8
3	9.6
4	19.2

19.

x	y
1	21
2	63
3	189
4	567
5	1,701

20. **Estadística** Considera este conjunto de datos.

14.5 15.6 18.1 16.2 15.9

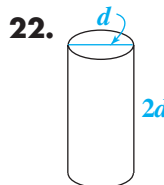
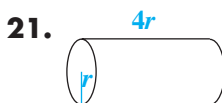
- Determina la media y la mediana de este conjunto de datos.
- ¿Qué valores puedes agregar al conjunto de datos de modo que la mediana permanezca igual, pero la media sea más grande?
- ¿Qué par de valores puedes agregar al conjunto *original* de datos de modo que la media permanezca igual, pero la mediana sea más grande?



Recuerda

El volumen de un cilindro es el área de su base multiplicada por su altura.

Geometría Escribe una expresión para el volumen de cada cilindro.



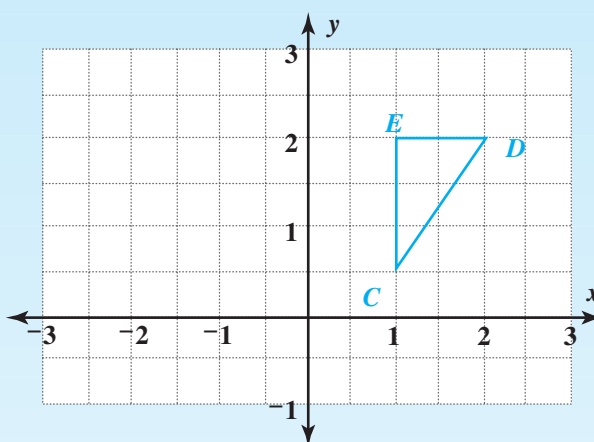
Coordenadas y transformaciones

Ya sabes cómo usar coordenadas para graficar relaciones. Las coordenadas son útiles para describir la posición de una figura geométrica y para realizar transformaciones. En esta lección, aprenderás cómo crear reflexiones y rotaciones con las reglas para las coordenadas.

MATERIALES
papel cuadriculado

Explora

Copia el siguiente triángulo en papel cuadriculado.



Transforma cada vértice del triángulo usando esta regla:
 $(x, y) \rightarrow (-x, y)$. Esta regla dice dos cosas:

- La coordenada x de la imagen es lo opuesto de la coordenada x original.
- La coordenada y de la imagen es lo mismo que la coordenada y original.

Describe cómo se relaciona la imagen de la figura original: ¿Es una *reflexión*, una *rotación* o una *traslación*? Provee tanta información como te sea posible sobre la transformación, como por ejemplo, el eje de reflexión o el vector de traslación.

Investigación 1 Reflexión y rotación con coordenadas

El observar figuras en los ejes de coordenadas te puede ayudar a pensar sobre reflexiones y rotaciones.

MATERIALES

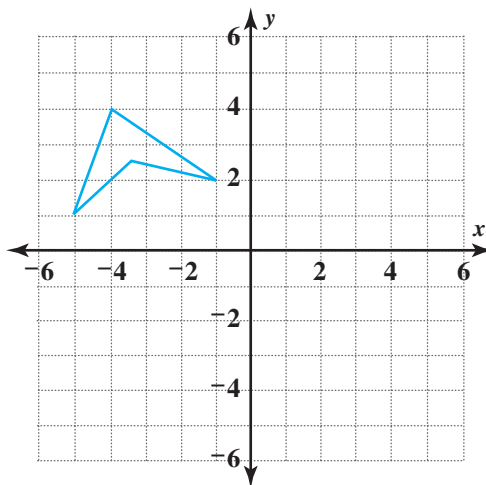
- papel cuadriculado
- geoespejo (opcional)
- transportador (opcional)
- papel de calcar (opcional)

Serie de problemas A

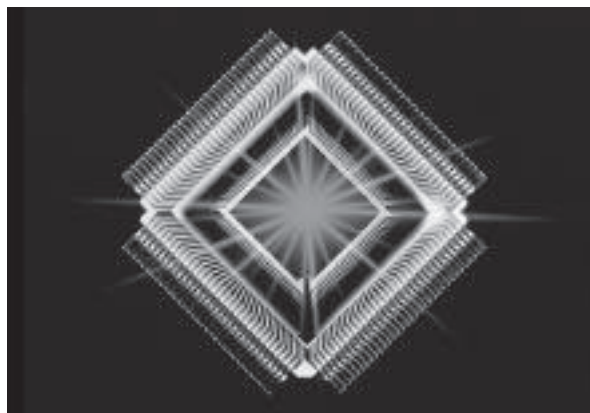
Cada uno de los Problemas 1 al 3 muestra una figura en un plano de coordenadas y una regla para aplicarla a las coordenadas. Para cada problema, haz las Partes a a la d para crear una imagen de la figura.

- Explica la regla en palabras.
- Calcula las coordenadas de cada vértice y copia la figura en papel cuadriculado.
- Aplica la regla dada en las coordenadas de cada vértice para calcular los vértices de la imagen.
- En el mismo grupo de ejes, grafica cada punto de la imagen. Conéctalos en orden.

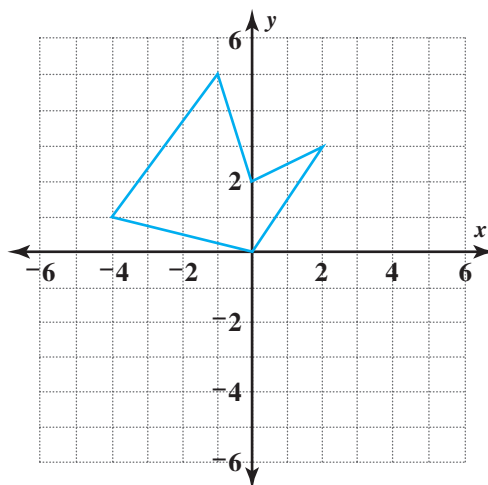
- Regla: $(x, y) \rightarrow (x, -y)$



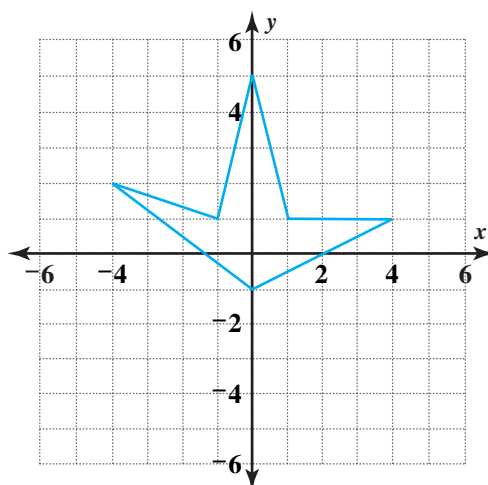
Microcircuitos diminutos como éste reemplazaron miles de redes enteras de miles de transistores y otros componentes eléctricos e hicieron posible la computadora personal. ¿Qué tipos de simetría puedes ver en este microcircuito?



2. Regla: $(x, y) \rightarrow (y, x)$



3. Regla: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$



4. Compara las figuras originales y las imágenes en los Problemas 1 al 3.

- a. ¿Para cuáles problemas puedes obtener la imagen mediante una *reflexión* de la figura original? Para cada uno de éstos indica el eje de reflexión. Puedes usar tu geoespejo para verificar.
- b. ¿Para cuáles problemas puedes obtener la imagen mediante una *rotación* de la figura original? Para cada uno de éstos, indica el centro y el ángulo de rotación. Puedes usar papel para calcar y un transportador para verificar.

Serie de problemas B

En esta serie de problemas, encontrarás una regla para una transformación dada.

1. El triángulo ABC tiene vértices $A(2, 5)$, $B(-2, 4)$ y $C(0, 3)$. Cierta transformación de estos vértices da $A'(-5, 2)$, $B'(-4, -2)$ y $C'(-3, 0)$.
 - a. Dibuja los dos triángulos en una cuadrícula.
 - b. ¿Es ésta una reflexión o una rotación? Si es una reflexión, indica el eje de reflexión. Si es una rotación, indica el centro y el ángulo de rotación.
 - c. ¿Cuál es la imagen de (x, y) bajo esta transformación?
2. Considera una reflexión sobre la recta $y = -x$.
 - a. Refleja el punto $(1, 0)$ sobre esta recta. ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen?
 - b. Refleja el punto $(0, 1)$ sobre la recta. ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen?
 - c. Si reflejas un punto (x, y) sobre la recta, ¿cuáles serán las coordenadas de su imagen? Verifica tu respuesta reflejando el $\triangle ABC$ del Problema 1 sobre la recta y compara las coordenadas de la imagen con las coordenadas de la figura original.

Comparte & resume

1. Si reflejas el punto $(-2, 4.3)$ sobre el eje y , ¿cuáles serán las coordenadas de su imagen?
2. Si rotas el punto $(1, 3)$ alrededor del origen a un ángulo de 90° de rotación, ¿cuáles serán las coordenadas de su imagen?
3. Explica cómo supiste que la transformación del Problema 1 de la Serie de problemas B era una rotación.
4. Explica cómo escribiste la regla para la reflexión del Problema 2 de la Serie de problemas B.

Investigación 2 Traslación con coordenadas

En la Investigación 1, viste cómo puedes aplicar una regla a las coordenadas de una figura para rotar o reflejar esa figura en el plano. De manera parecida, algunas reglas producirán una traslación de una figura.

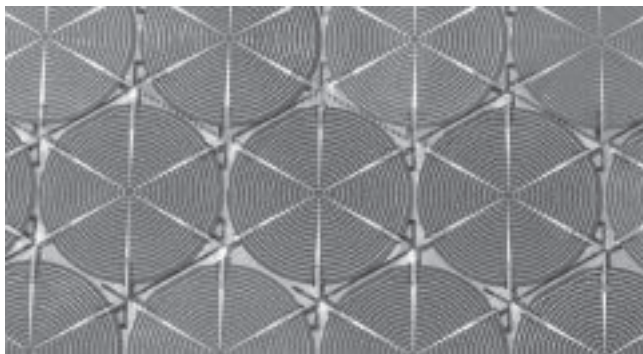
MATERIALES
papel cuadriculado

Serie de problemas C

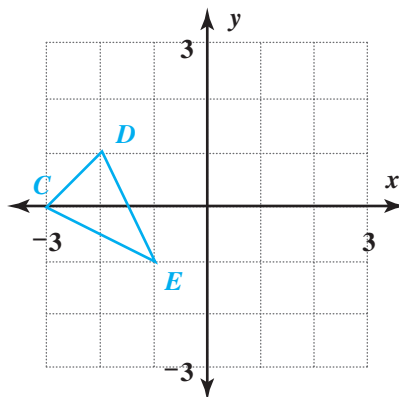
Cada uno de los Problemas 1 al 3 muestra una figura en un plano de coordenadas y una regla para aplicarla a las coordenadas. Para cada problema, sigue estos pasos para crear una imagen de la figura.

- Determina las coordenadas de cada vértice y copia la figura en el papel cuadriculado.
- Aplica la regla dada a cada vértice en las coordenadas para determinar los vértices de la imagen.
- En el mismo grupo de ejes, grafica cada imagen de los puntos. Conéctalos en orden.

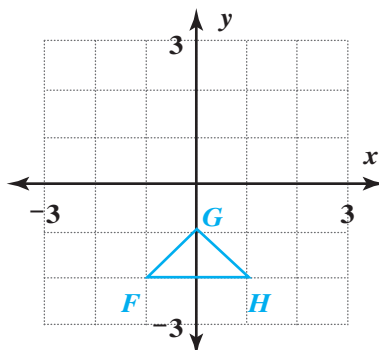
1. Regla: $(x, y) \rightarrow (x + 2, y)$. Es decir, para obtener la imagen del punto, suma 2 a la coordenada x y deja igual la coordenada y .



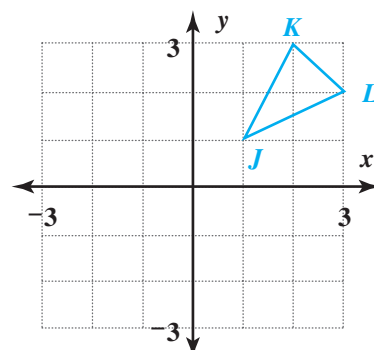
Los colectores solares controlan la energía del Sol para usos tales como el calentamiento de casas y piscinas. ¿Qué tipos de simetría puedes ver en este colector solar?



2. Regla: $(x, y) \rightarrow (x, y + 3)$



3. Regla: $(x, y) \rightarrow (x - 2, y - 2)$



Piensa & comenta

Todas las reglas que has visto para traslaciones tienen la misma forma: suma algún número a la coordenada x y suma algún otro número a la coordenada y . Los números sumados podrían ser positivos, negativos ó 0.

¿Qué tipo de números sumarías a cada coordenada de un punto para mover el punto

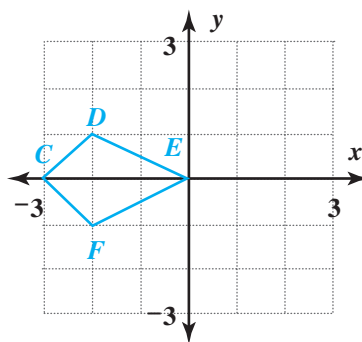
- derecho hacia abajo (no a la izquierda o a la derecha)?
- hacia arriba y a la izquierda?

MATERIALES
papel cuadriculado

Serie de problemas D

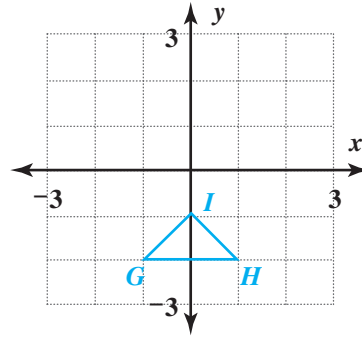
Ahora practicarás con la escritura de reglas para dar una traslación deseada.

1. Aquí hay un cuadrilátero en un plano de coordenadas.



- a. Copia el cuadrilátero en papel cuadriculado. Después dibuja una imagen del cuadrilátero que sea trasladado 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo.
- b. ¿Qué regla realizada en las coordenadas crearía esta traslación?

2. Aquí hay un triángulo en un plano de coordenadas.

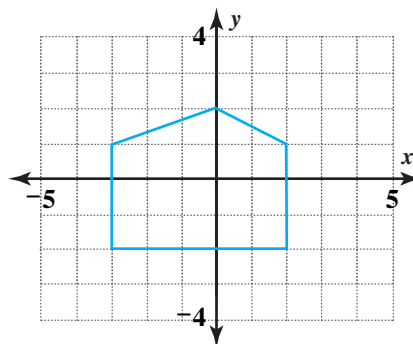


- Copia el triángulo en papel cuadriculado. Después, dibuja una imagen del triángulo que se haya trasladado 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba.
- Escribe la regla de coordenadas para describir la traslación en la Parte a.
- Traslada la *imagen* 2 unidades hacia arriba y 3 unidades a la izquierda.
- Escribe la regla de coordenadas para describir la traslación en la Parte c.
- Compara la imagen que creaste en la Parte c con la figura original. ¿Existe una traslación sencilla que crearía esa imagen a partir de la original? De ser así, describe la traslación y explica cómo se relaciona a las dos traslaciones que realizaste por separado.

MATERIALES
papel cuadriculado

Comparte & resume

- Escribe una regla de coordenadas para una traslación que mueve un punto 5 unidades a la derecha y 7 unidades hacia abajo.
- Inventa tu propia regla para trasladar una figura. Escríbela como una regla de coordenadas y demuestra cómo funciona en una copia de la siguiente figura.



Ejercicios por tu cuenta

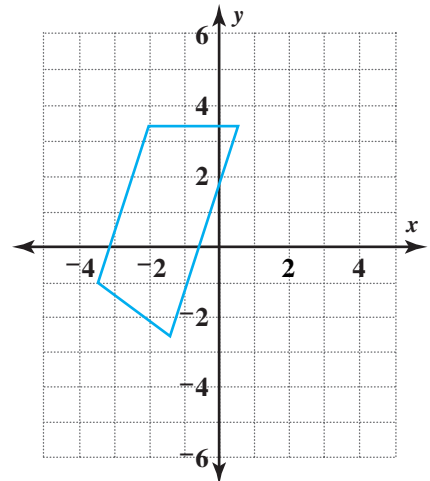
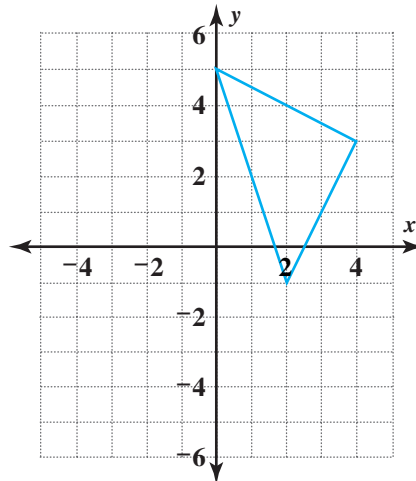
Practica & aplica

Para los Ejercicios 1 y 2 completa las Partes a, b, c, d y e.

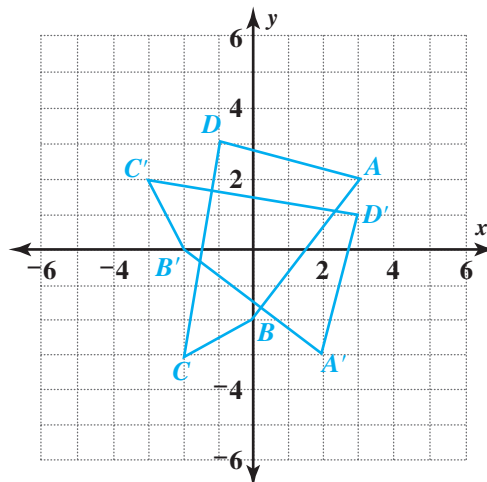
- Explica la regla en palabras.
- Determina las coordenadas de cada vértice y copia la figura en papel cuadriculado.
- Aplica la regla dada a las coordenadas de cada vértice para determinar los vértices de la imagen.
- En el mismo conjunto de ejes, grafica cada punto de la imagen. Conéctalos en orden.
- Compara la imagen con la original: ¿Es una reflexión, una rotación, una traslación o alguna otra transformación?

1. Regla: $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

2. Regla: $(x, y) \rightarrow (-x, y)$



3. Se aplicó una regla al cuadrilátero original $ABCD$ para crear el cuadrilátero imagen $A'B'C'D'$.



- a. Copia la tabla y después súmale las coordenadas de cada punto. Recuerda, el punto A' es la imagen del punto A . El punto B' es la imagen del punto B , y así sucesivamente.

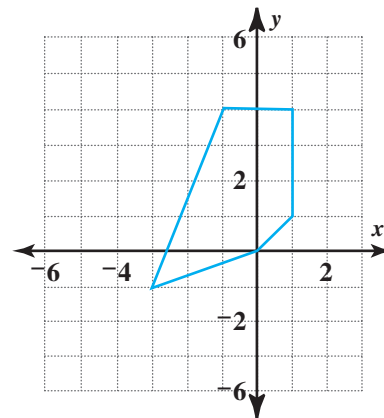
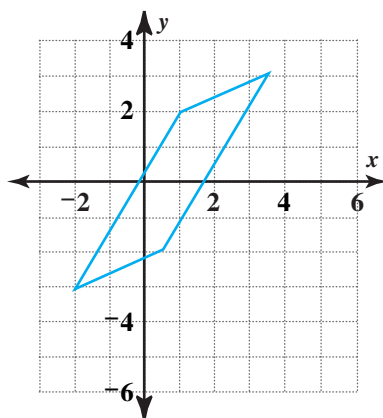
Puntos	Coordenadas originales	Coordenadas de la imagen
A, A'		
B, B'		
C, C'		
D, D'		

- b. Escribe la regla que crea las coordenadas de la imagen, a partir de las coordenadas originales.
- c. ¿Produce la regla una reflexión, una rotación, una traslación o alguna otra transformación?

Para los Ejercicios 4 y 5, completa las Partes a, b, c y d.

- a. Determina las coordenadas de cada vértice y copia la figura en papel cuadriculado.
- b. Aplica la regla dada a las coordenadas de cada vértice para determinar las imágenes de los vértices.
- c. En el mismo conjunto de ejes, grafica cada punto. Conéctalos en orden.
- d. Compara la imagen con la original: ¿Es una reflexión, una rotación, una traslación o alguna otra transformación?

4. Regla: $(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 3)$ 5. Regla: $(x, y) \rightarrow (x - 1, y - 1)$



6. Supón que trasladas una figura según esta regla:

$$(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 3)$$

Después, trasladas la imagen según esta regla:

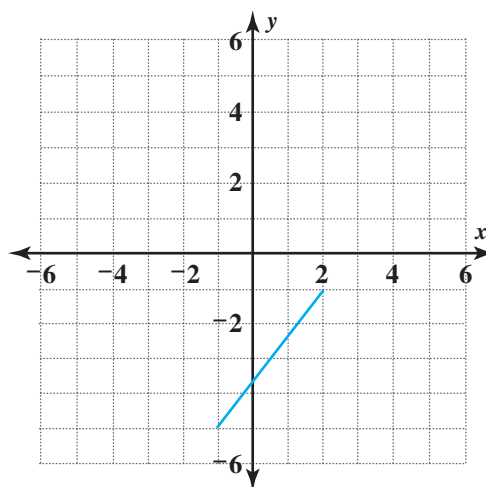
$$(x, y) \rightarrow (x - 1, y - 1)$$

¿Dónde está la imagen final en relación con la figura original?

Conecta & amplía

7. En las Lecciones 5.1 y 5.2 pudiste haber hecho conjeturas de que las reflexiones y las rotaciones producen figuras congruentes a las figuras originales. Si tienes una regla que produce una reflexión o una rotación, puedes usar la fórmula de la distancia para verificar que los segmentos queden a la misma distancia.

a. Copia la cuadrícula y el siguiente segmento. Después, usa la regla $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ para crear un nuevo segmento reflejado sobre el eje x .



b. Usa la fórmula de la distancia para calcular la longitud del segmento original.

c. Usa la fórmula de la distancia para calcular la longitud de la imagen del segmento. ¿Es igual a la original?

d. Piensa cómo crear reflexiones usando un geoespejo o mediante dobleces. Explica por qué la longitud de un segmento no cambiaría cuando lo reflejas sobre *cualquier* recta.



Recuerda

Para calcular la longitud de un segmento, usa la fórmula de la distancia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

8. Considera lo que ocurre cuando reflejas una gráfica lineal.
 - a. Grafica la recta $y = 2.5x + 4$.
 - b. En los mismos ejes, dibuja las imágenes de esta recta después de una reflexión sobre el eje x .
 - c. Escribe una ecuación para la nueva recta.
 - d. En los mismos ejes, dibuja la imagen de la recta original, después de una reflexión sobre el eje y .
 - e. Escribe una ecuación para la nueva recta.
 - f. ¿Qué observas sobre las dos imágenes que dibujaste?
 - g. ¿Apoyan tu observación en la Parte f tus ecuaciones para las Partes c y e? Explica.
9. Considera lo que sucede cuando rotas una gráfica lineal 180° .
 - a. Grafica la recta $y = 2x + 4$.
 - b. En la misma cuadrícula, dibuja la imagen de la recta con una rotación de 180° centrada en el origen.
 - c. ¿Qué observas acerca de la imagen de la recta y la recta original?
 - d. Escribe una ecuación para la nueva recta.
 - e. ¿Apoya tu observación en la Parte c tu ecuación en la Parte d? Explica.
10. Dibuja la gráfica de $y = x^3$. Después, dibuja una imagen de esta recta con una rotación de 180° alrededor del origen. ¿Qué observas?



Cuando te miras en un espejo plano, los rayos luminosos se reflejan de regreso hacia ti creando la imagen con la cual estás bien familiarizada(o).



En tus propias palabras

Has aprendido sobre dos tipos de reglas simbólicas. Un tipo, la ecuación, describe una relación entre dos variables. El segundo tipo describe la transformación de un punto original a un punto imagen. Da un ejemplo de cada tipo de regla. ¿En qué se diferencian?



Recuerda

Para calcular la longitud de un segmento, usa la fórmula de la distancia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

11. Aquí hay otra regla para aplicar a las coordenadas:

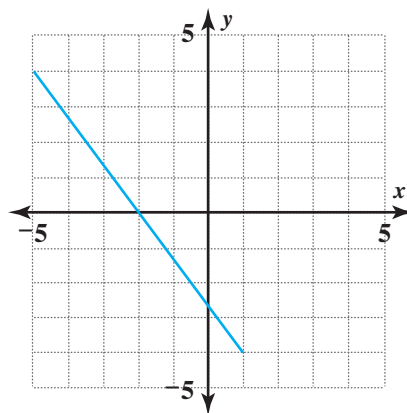
$$(x, y) \rightarrow (x + 0, y + 0)$$

Esto quiere decir, suma 0 a ambas coordenadas x y y . Esto se llama la *transformación identidad*.

- Explica qué hace la regla.
- ¿Por qué crees que esta transformación tiene el nombre *identidad*?
- La transformación identidad anterior está escrita como una traslación. ¿Qué rotación da el mismo resultado? Es decir, ¿qué ángulo de rotación podrías usar y cuál centro de rotación?
- ¿Existe una reflexión sencilla que pudiera dar el mismo resultado que la transformación identidad? De ser así, dibuja un triángulo y el eje de reflexión apropiado.
- ¿Existe una transformación que pudiera dar el mismo resultado que la transformación identidad? De ser así, ¿por qué número multiplicarías las coordenadas?

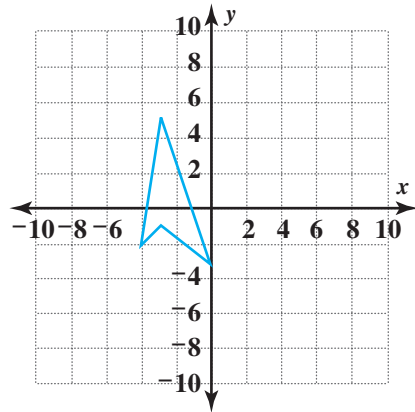
12. En la Lección 5.3, quizás hayas hecho la conjetura que las traslaciones producen figuras congruentes a las figuras originales. Si tienes una regla que produce una traslación, puedes usar la fórmula de la distancia para verificar que los segmentos tengan la misma longitud.

- Copia la cuadrícula y el segmento de la derecha. Después, usa la regla $(x, y) \rightarrow (x + 3, y + 1)$ para crear un nuevo segmento trasladado 3 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba.



- Usa la fórmula de la distancia para calcular la longitud del segmento original.
- Ahora calcula la longitud del segmento imagen. ¿Es igual que la original?
- Piensa sobre cómo crear traslaciones con papel de calcar. Explica por qué la longitud de un segmento no cambiaría al trasladarlo por cualquier vector.

13. Copia esta figura.



- Usa la regla $(x, y) \rightarrow (-x, y - 3)$ para crear una imagen del cuadrilátero.
- Describe la regla de transformación aplicada. ¿Es una rotación, una reflexión, una traslación, una transformación o una reflexión deslizante?

Repaso mixto

Indica si la relación en cada tabla podría ser lineal.

14.

x	0	1	2	3	4
y	2.2	0	-2.2	-4.4	-6.6

15.

x	0	1	2	3	4
y	-2	2	-4	4	-6

16.

x	0	1	2	3	4
y	4.1	13.1	22.1	31.1	40.1

17. Devon tiene 100 metros de hilo de pescar. Ella corta el hilo por la mitad, guarda una hebra en su caja de pesca y corta la segunda hebra por la mitad de nuevo. Ella continúa cortando de este modo.

- Copia y completa la tabla para esta situación.

Número de cortes	0	1	2	3	4	5
Longitud del hilo (m)	100					

- ¿Qué tipo de relación es ésta?

- 18. Estadística** Para su catorceavo cumpleaños, el abuelo de Fran le va a regalar su colección de historietas. El abuelo le explica que él ha organizado las historietas por año de publicación, en seis categorías, las cuales usan con frecuencia los coleccionistas. Fran contó el número de historietas en cada categoría.

Categoría	Años cubiertos	Número de historietas
Anteriores al siglo de oro	1896–1937	21
Siglo de oro	1938–1945	117
Posteriores al siglo de oro	1946–1949	32
Anteriores al siglo de plata	1950–1955	93
Siglo de plata	1956–1969	67
Posteriores al siglo de plata	1970–presente	23

- Haz una gráfica circular para representar el número de historietas en cada categoría. Escribe el porcentaje de cada sección en la gráfica, redondeando al 0.1% más cercano.
- La colección contiene 32 historietas para los cuatro años posteriores al siglo de oro o un promedio de 8 historietas por año. ¿Qué categoría contiene la mayor parte de las historietas por año? ¿Qué contiene la menor parte? Para cada una de éstas, ¿cuál es el número promedio de historietas por año?
- ¿Suman 100% los porcentajes de tu gráfica? De no ser así, ¿por qué crees que no suman 100%?



VOCABULARIO

dibujo a escala
dilatación
eje de reflexión
eje de simetría
factor de escala
imagen
mediatriz
reflexión sobre una recta
rotación
simetría de reflexión
simetría de rotación
simetría lineal
transformación
traslación
vector

Resumen del capítulo

En este capítulo, estudiaste la geometría de transformación. Aprendiste cómo realizar cuatro transformaciones: *reflexión*, *rotación*, *traslación* y *dilatación*. También aprendiste a reconocer diseños usando ambos tipos simetría: de reflexión y de rotación.

Tres de las traslaciones: la reflexión, la rotación y la traslación producen imágenes congruentes a las figuras originales. La dilatación produce imágenes semejantes pero no necesariamente congruentes.

Estrategias y aplicaciones

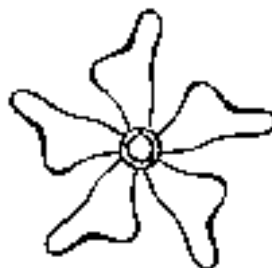
Las preguntas en esta sección te ayudarán a repasar y aplicar las ideas y estrategias importantes desarrolladas en este capítulo.

Reconoce simetría de reflexión y de rotación

Cada una de las figuras en las Preguntas 1 a la 3 poseen simetría de reflexión, simetría de rotación o ambas. Copia cada figura y después contesta las Partes a, b y c.

- Determina el tipo o tipos de simetría que tiene la figura.
- Indica el eje o ejes de simetría y el centro de rotación, si lo hay.
- Si la figura tiene simetría de rotación, determina el ángulo de rotación.

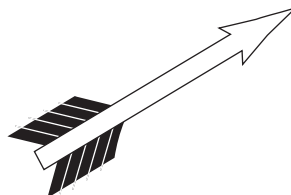
1.



2.



3.



Realiza reflexiones

Aprendiste a reflejar figuras usando tres métodos: doblar, usar un geoespejo y usar una mediatriz.

4. Elige uno de estos tres métodos y explica en tus propias palabras cómo reflejar una figura usando ese método.
5. Una regla particular para reflejar una figura en una cuadrícula de coordenadas cambia una coordenada original (x, y) en la coordenada imagen $(-y, -x)$. ¿Cuál es el eje de reflexión para esta regla?

Realiza rotaciones

Dos de los métodos que aprendiste para rotar figuras son usar papel para calcar y usar un transportador y una regla.

6. Elige uno de estos dos métodos y explica en tus propias palabras cómo usarlo para rotar una figura alrededor de un punto con un ángulo de rotación dado.
7. Una regla particular para rotar una figura en una cuadrícula de coordenadas cambia una coordenada original (x, y) a la imagen de la coordenada $(-y, x)$. ¿Cuáles son el centro y el ángulo de rotación para esta regla?

Realiza traslaciones

8. Explica en tus propias palabras cómo trasladar una figura por un vector dado.
9. Una regla particular para trasladar una figura en una cuadrícula de coordenadas cambia una coordenada original (x, y) en la coordenada imagen $(x + 4, y - 3)$. En la cuadrícula de coordenadas, muestra el vector de traslación para esta regla.

Realiza dilataciones

En este capítulo, aprendiste dos métodos para dilatar figuras: el método de coordenadas y el método de proyección.

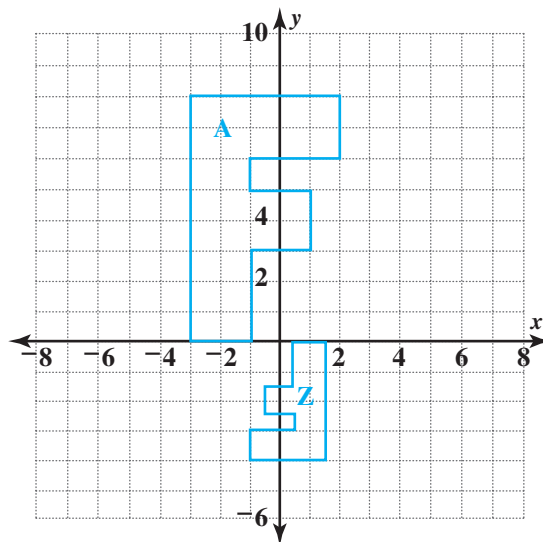
10. Elige uno de estos métodos. Explica en tus propias palabras cómo usar este método para dilatar una figura por un factor de escala dado.
11. Un polígono tiene un vértice en el punto $(8, 6)$. Una versión dilatada del polígono tiene un vértice correspondiente en el punto $(12, 9)$. ¿Qué factor de escala se usó para dilatar el polígono original?



Combina transformaciones

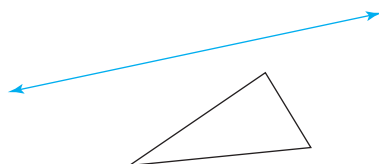
12. La Figura Z es la imagen de la Figura A.

- Halla una manera de transformar la Figura A en la Figura Z usando *dos* transformaciones.
- ¿Importa el orden en que realices las transformaciones?

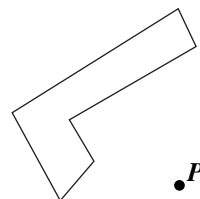


Demuestra tus destrezas

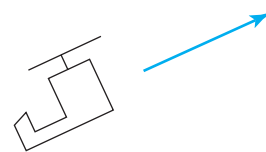
13. Copia esta figura. Refleja la figura a través de la recta usando un método diferente al descrito en la Pregunta 4.



14. Copia esta figura. Rota la figura sobre el punto P con un ángulo de rotación de -40° . Usa el método que no describiste en la Pregunta 6.



15. Copia esta figura. Traslada la figura por el vector dado.



16. Copia esta figura en papel cuadriculado. Amplía la figura por un factor de escala 3. Usa el método que no describiste en la Pregunta 10.

